5 अभाज्य समय

0675CH05

5.1 सार्व गुणज और सार्व गुणनखंड

इडली-वड़ा खेल

बच्चे वृत्ताकार बैठे हैं और संख्या का खेल, खेल रहे हैं।

एक बच्चा '1' बोलकर खेल शुरू करता है। दूसरा खिलाड़ी '2' बोलता है और यह क्रम आगे बढ़ता रहता है, लेकिन जब 3, 6, 9... (3 के गुणज) की बारी आएगी तो खिलाड़ी संख्या बोलने के स्थान पर 'इडली' कहेगा। इसके साथ ही जब 5, 10, 15... (5 के गुणज) की बारी आएगी तो खिलाड़ी संख्या बोलने की जगह 'वड़ा' कहेगा। जब संख्या 3 और 5 दोनों का गुणज हो तो खिलाड़ी 'इडली-वड़ा' कहेगा। यदि कोई खिलाड़ी गलती करता है तो उसे खेल से बाहर कर दिया जाएगा।

खेल तब तक, कई चरणों में चलता रहेगा, जब तक कि केवल एक खिलाड़ी शेष बच जाए।

किन संख्याओं के बदले खिलाड़ी 'इडली' कहेगा? ये संख्याएँ 3, 6, 9, 12, 15, 18... और आगे इसी क्रम में होंगी।

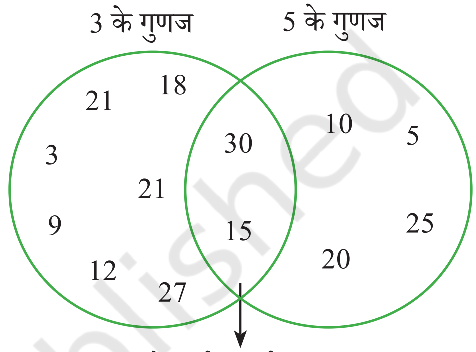
किन संख्याओं के लिए खिलाड़ी 'वड़ा' कहेगा? ये संख्याएँ 5, 10, 15, 20 .... और आगे इसी क्रम में होंगी।

वह कौन-सी पहली संख्या होगी जिसके लिए खिलाड़ी 'इडली-वड़ा' बोलेगा? यह संख्या 15 है, जो 3 और 5 दोनों का गुणज है। ऐसी और संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 3 और 5 की गुणज हैं। ये संख्याएँ __________ कहलाती हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. किस संख्या पर दसवीं बार 'इडली-वड़ा' कहा जाएगा?
2. यदि खेल 1 से 90 तक की संख्याओं के लिए खेला जा रहा हो तो ज्ञात कीजिए—
   a. बच्चा कितनी बार 'इडली' कहेगा (इसमें 'इडली-वड़ा' कही जाने वाली बारी भी सम्मिलित होगी)?
   b. बच्चा कितनी बार 'वड़ा' कहेगा (इसमें 'इडली-वड़ा' कही जाने वाली बारी भी सम्मिलित होगी)?
   c. बच्चा कितनी बार 'इडली-वड़ा' कहेगा?
3. क्या होगा यदि खेल 900 तक खेला जाएगा? इसके आधार पर आपके उत्तर में क्या परिवर्तन होंगे?
4. क्या यह आकृति 'इडली-वड़ा' खेल से किसी रूप में संबंधित हैं?

संकेत— कल्पना कीजिए कि आप यह खेल 30 तक खेलते हैं। अगर आप 60 तक खेल खेलते हैं, तो ऐसी ही आकृति बनाइए।



आकृति 5.1

आइए, अब 'इडली-वड़ा' खेल कुछ अलग संख्या युग्मों के साथ खेलें—

a. 2 और 5
b. 3 और 7
c. 4 और 6

हम 'इडली' छोटी संख्या के गुणज के लिए, 'वड़ा' बड़ी संख्या के गुणज के लिए और 'इडली-वड़ा' सार्व गुणज के लिए कहेंगे। यदि खेल संख्या 60 तक खेला जा रहा हो तो आकृति 5.1 के समान आकृति बनाइए।

- निम्नलिखित संख्या में से कौन-सी अन्य संख्या हो सकती है—
  2, 3, 5, 8, 10?

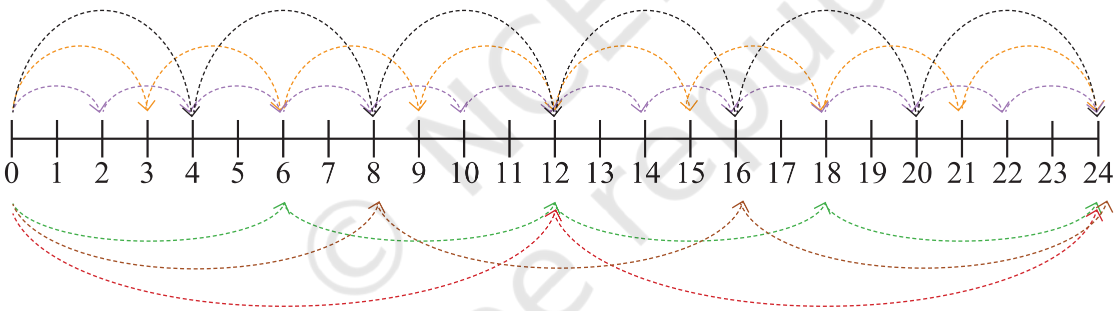
जैकपॉट के लिए छलाँग

जम्पी और ग्रम्पी एक खेल खेलते हैं।

- ग्रम्पी ने किसी संख्या पर एक खजाना रखा। उदाहरण के लिए, उसने इसे 24 पर रखा।
- जम्पी ने एक छलाँग के आकार का चयन किया। यदि उसने 4 का चयन किया, तो 0 से शुरू करते हुए उसे 4 के गुणज पर छलाँग लगानी होगी।
- जम्पी को खजाना मिल जाएगा, यदि वह उस संख्या पर पहुँच जाए जहाँ ग्रम्पी ने खजाना रखा है।

कौन-सा छलाँग का आकार जम्पी को '24' पर पहुँचाएगा?

यदि वह 4 का चयन करता है तो जम्पी पहुँचता है— 4 → 8 → 12 → 16 → 20 → 24 → 28 → ... पर अन्य सफल छलाँग के आकार— 2, 3, 6, 8 और 12 होंगे।



आप छलाँग का आकार 1 और 24 के विषय में क्या कहेंगे? हाँ, वे भी 24 पर पहुँचेंगे।

संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 सभी 24 को पूर्णतया विभाजित करती हैं। ऐसी संख्याओं को याद कीजिए जिन्हें 24 के **गुणनखंड** या **भाजक** कहा जाता है।

ग्रम्पी ने खेल के स्तर को थोड़ा कठिन किया। उसने दो अलग-अलग संख्याओं पर दो खजाने रखे। जम्पी को एक छलाँग के आकार का चयन करना है और इसी पर टिके या स्थिर रहना है। जम्पी को खजाना तभी मिलेगा, जब वह चयनित छलाँग के आकार से दोनों संख्याओं पर पहुँचेगा। पहले की तरह जम्पी 0 से प्रारंभ करता है।

ग्रम्पी ने खजाने को 14 और 36 पर रखा। जम्पी छलाँग का आकार 7 चुनता है।

क्या जम्पी दोनों खजानों पर पहुँचेगा? 0 से शुरू करते हुए वह 7 → 14 → 21 → 28 → 35→ 42... पर पहुँचेगा। हम देखते हैं कि वह 14 पर तो पहुँचता है, लेकिन 36 पर नहीं पहुँचता। अत: उसे खजाना नहीं मिलता। उसे कौन-से छलाँग के आकार का चयन करना चाहिए था?

14 के गुणनखंड हैं— 1, 2, 7, 14 तो, इन छलाँग के आकार से वह 14 पर अवश्य पहुँचेगा।

36 के गुणनखंड हैं— 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, इन छलाँग के आकर से वह 36 पर अवश्य पहुँचेगा।

अत: 1 या 2 के छलाँग के आकार से वह 14 और 36 दोनों पर अवश्य पहुँचेगा। यहाँ ध्यान दीजिए कि संख्या 1 और 2, संख्याओं 14 और 36 के सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखंड हैं।

वे संभव छलाँग के आकार जिनसे दोनों खजानों तक पहुँचा जा सके, उन दोनों संख्याओं के **उभयनिष्ठ गुणनखंड** हैं जिन पर खजाना रखा हुआ है।

- कौन-सा छलाँग का आकार 15 और 30 दोनों तक पहुँच सकता है? यहाँ बहुत सारे छलाँग के आकार संभव हैं। उन सभी को ढूँढ़ने का प्रयास कीजिए।
- नीचे दी गई तालिका का अवलोकन कीजिए। इस तालिका से आपने क्या समझा?

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

तालिका में—

गणित चर्चा

1. क्या छायांकित बॉक्स संख्याओं के मध्य कुछ समानता है?
2. क्या वृत्त में अंकित संख्याओं के बीच कुछ समानता है?
3. ऐसी कौन-सी संख्याएँ हैं, जो छायांकित बॉक्स और वृत्त, दोनों में हैं। इन संख्याओं को क्या कहते हैं?

आइए, पता लगाएँ

1. 310 और 410 के बीच आने वाले 40 के सभी गुणज ज्ञात कीजिए।

2. मैं कौन हूँ?

   a. मैं 40 से कम एक संख्या हूँ, मेरा एक गुणनखंड 7 है। मेरे अंकों का जोड़ 8 है।

   b. मैं 100 से छोटी एक संख्या हूँ। मेरे दो गुणनखंड 3 और 5 हैं। मेरा एक अंक, दूसरे से 1 अधिक है।

3. एक संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योग उस संख्या से दुगना हो, **संपूर्ण संख्या (Perfect Number)** कहलाती है। संख्या 28 एक संपूर्ण संख्या है। इसके गुणनखंड 1, 2, 4, 7, 14 और 28 है, इनका योग 56 है जो कि 28 का दुगना है। 1 से 10 तक के बीच एक संपूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए।

4. उभयनिष्ठ गुणनखंड ज्ञात कीजिए—

   a. 20 और 28   b. 35 और 50

   c. 4, 8 और 12   d. 5, 15 और 25

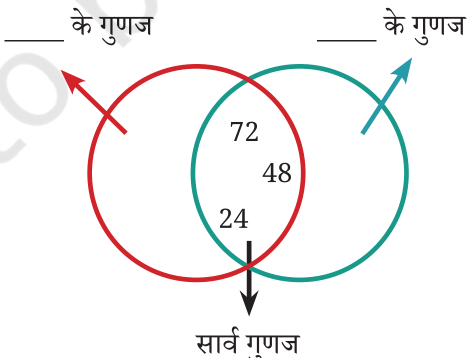
5. तीन ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जो 25 की गुणज हैं लेकिन 50 की नहीं।

6. अंशु और उसके मित्र दो संख्याएँ लेकर 'इडली-वड़ा' खेल, खेल रहे हैं। दोनों संख्याएँ 10 से छोटी हैं। पहली बार यदि कोई 'इडली-वड़ा' कहता है, तो वह संख्या 50 के पश्चात् आती है। वे दोनों संख्याएँ क्या होंगी, जिन्हें 'इडली' और 'वड़ा' कहा गया है।

7. खजाने की खोज खेल में ग्रम्पी ने खजाने को 28 और 70 पर रखा है। दोनों संख्याओं पर पहुँचने के लिए छलाँग का आकार क्या होना चाहिए।

8. नीचे दिए गए चित्र से गुणा ने उभयनिष्ठ गुणज को छोड़कर सभी संख्याओं को मिटा दिया है। पता लगाइए कि वे संख्याएँ कौन-सी हो सकती हैं? और उन लुप्त संख्याओं को खाली स्थान में लिखिए।

गणित चर्चा



9. एक सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 7 को छोड़कर 1 से 10 तक की सभी संख्याओं का गुणज हो।

प्रयास करें

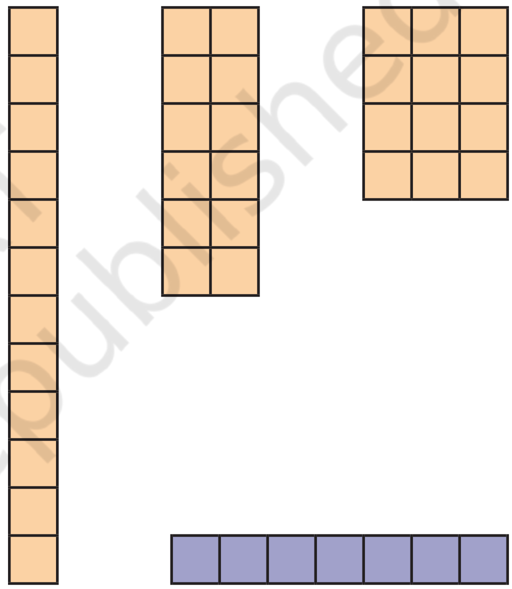
10. एक सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 1 से 10 तक की सभी संख्याओं का गुणज हो।

5.2 अभाज्य संख्याएँ

गुणा और अंशु अपने फार्म में उगने वाले अंजीरों को बाँधकर पैक करना चाहते हैं। गुणा प्रत्येक बॉक्स में 12 अंजीर रखना चाहता है और अंशु प्रत्येक बॉक्स में 7 अंजीर रखना चाहता है।
ऐसी कितनी व्यवस्थाएँ संभव हैं?

ऐसे विभिन्न तरीके सोचिए और ज्ञात कीजिए, जिनमें—

1. गुणा 12 अंजीर आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकता है।
2. अंशु 7 अंजीरों को आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकता है। गुणा ने व्यवस्थाओं की एक सूची बनाई है।



प्रत्येक व्यवस्था में पंक्तियों और स्तंभों (कॉलम) की संख्याओं को देखिए। ये 12 से किस प्रकार से संबंधित हैं?

उदाहरण के लिए, दूसरी व्यवस्था में 12 अंजीरों को दो स्तंभों, जिनमें प्रत्येक में 6 अंजीरों को व्यवस्थित किया गया है। या $12 = 2 \times 6$

अंशु केवल एक व्यवस्था बना सकता है— 7×1 या 1×7। यहाँ अन्य कोई आयताकार व्यवस्था संभव नहीं है।

गुणा की प्रत्येक व्यवस्था में पंक्तियों की संख्या को स्तंभों की संख्याओं से गुणन कर 12 प्राप्त होता है। अतः पंक्ति या स्तंभों की संख्या, 12 के गुणनखंड हैं।

यह दृष्टिगत होता है कि संख्या 12 को हम एक से अधिक आयताकार रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं, क्योंकि 12 के दो से अधिक गुणनखंड हैं। संख्या 7 केवल एक ही तरह से व्यवस्थित हो सकती है क्योंकि इसके केवल दो गुणनखंड हैं— 1 और 7।

ऐसी संख्याएँ जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं, **अभाज्य संख्याएँ (Prime numbers) या अभाज्य (Primes)** कहलाती हैं। कुछ प्रारंभिक अभाज्य संख्याएँ हैं— 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19। ध्यान दीजिए, किसी भी अभाज्य संख्या के गुणनखंड 1 और वह संख्या स्वयं होती है।

ऐसी संख्याएँ जिनके दो से अधिक गुणज होते हैं? उन्हें **भाज्य संख्याएँ (Composite numbers)** कहते हैं। पहली कुछ भाज्य संख्याएँ हैं— 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20।

संख्या 1 के विषय में क्या कहेंगे, जिसका केवल 1 गुणनखंड है? 1 न ही अभाज्य संख्या है न ही भाज्य संख्या है।

21 से 30 के बीच कितनी अभाज्य संख्याएँ हैं? 21 से 30 के बीच कितनी भाज्य संख्याएँ हैं?

क्या हम 1 से 100 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना सकते हैं?

अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने के लिए एक रोचक तरीका दिया गया है। नीचे दिए गए चरणों का प्रयोग करते हुए देखिए कि क्या परिणाम निकलता है?

चरण 1— 1 को काट दीजिए क्योंकि यह न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य है।

चरण 2— 2 पर गोल घेरा बनाइए और 2 के अन्य सभी गुणजों, जैसे— 4, 6, 8.... इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 3— आप देखेंगे कि अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर गोल घेरा बना दीजिए। 3 के अन्य सभी गुणजों, जैसे— 6, 9, 12.... इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 4— अगली बिना कटी संख्या 5 है। 5 पर घेरा बनाइए। इसको छोड़ कर 5 के अन्य सभी गुणजों 10, 15, 20.... इत्यादि को काट दीजिए।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण 5— इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक उपरोक्त सूची की सभी संख्याओं पर या तो घेरा न लग जाए या उन्हें काट न दिया जाए।

घेरा लगी हुई सभी संख्याएँ, अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 के अतिरिक्त सभी काटी गई संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं। यह विधि इराटोस्थेनीस की छलनी (Sieve of Eratosthenes) कहलाती है।

इस विधि को 100 से बड़ी संख्याओं के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है। इराटोस्थेनीस 2200 वर्ष पूर्व एक ग्रीक गणितज्ञ थे, जिन्होंने अभाज्य संख्याओं को सूचीबद्ध करने की यह विधि विकसित की थी।

गुणा और अंशु आश्चर्यचकित हैं कि इस सरल विधि द्वारा अभाज्य संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं। सोचिए कि यह विधि किस प्रकार कार्य करती है। दिए गए चरणों को पुन: पढ़िए और देखिए कि प्रत्येक चरण के पश्चात् क्या-क्या होता है?

आइए, पता लगाएँ

1. हम देखते हैं कि 2 एक अभाज्य संख्या है और यह सम संख्या भी है। क्या कोई अन्य सम अभाज्य संख्या है?
2. 100 तक की अभाज्य संख्याओं की सूची देखिए। दो क्रमागत अभाज्य संख्याओं में न्यूनतम एवं अधिकतम अंतर क्या है?
3. क्या प्रत्येक पंक्ति में एक समान संख्या में अभाज्य संख्याएँ थीं? किन दहाइयों में न्यूनतम अभाज्य संख्याएँ हैं? यह भी बताइए कि पिछले पृष्ठ पर दी गई सारणी में किनमें अधिकतम अभाज्य संख्याएँ हैं?

युगों-युगों से अभाज्य संख्याएँ

अभाज्य संख्याएँ, सभी पूर्ण संख्याओं के निर्माण खंड (Building Blocks) हैं। ग्रीक सभ्यता (2000 वर्षों से भी पहले) से शुरू करते हुए, आज तक गणितज्ञ उनके रहस्यों को सुलझाने के लिए संघर्ष कर रहे हैं।

सोच के लिए खुराक— क्या कोई सबसे बड़ी अभाज्य संख्या होती है? या अभाज्य संख्याओं की सूची बिना किसी अंत के बढ़ती रहेगी? युक्लिड (Euclid) नाम के गणितज्ञ ने इसका उत्तर दिया, आप भी आगे की कक्षा में यह जान पाएँगे।

मनोरंजक तथ्य— किसी के द्वारा लिखी गई सबसे बड़ी अभाज्य संख्या इतनी बड़ी है कि वह 6500 पृष्ठों पर लिखी गई है। अतः हम उसे केवल एक कम्प्यूटर पर ही लिख सकते हैं।

4. इनमें से कौन-सी संख्याएँ अभाज्य हैं— 23, 51, 37, 26?
5. अभाज्य संख्याओं के तीन युग्म लिखिए, जो 20 से कम हों और उनका योग 5 का गुणज हो।
6. संख्या 13 और 31 अभाज्य संख्याएँ हैं। इन दोनों संख्याओं में अंक 1 और 3 समान हैं। 100 तक की संख्याओं में से ऐसे अन्य सभी अभाज्य संख्याओं के युग्म ज्ञात कीजिए।
7. 1 से 100 के बीच 7 क्रमागत भाज्य संख्याएँ लिखिए।
8. अभाज्य संख्याओं के युग्म जिनका अंतर 2 हो जुडवाँ **अभाज्य युग्म (Twin Primes)** कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, 3 और 5 जुड़वाँ अभाज्य युग्म हैं, इसी प्रकार 17 और 19 हैं। 1 से 100 के बीच अन्य जुड़वाँ अभाज्य युग्म ज्ञात कीजिए?

9. प्रत्येक कथन को सही या गलत के रूप में पहचानिए एवं स्पष्ट कीजिए—
   a. ऐसी कोई अभाज्य संख्या नहीं है जिसका इकाई का अंक 4 हो।
   b. अभाज्य संख्याओं का गुणनफल भी अभाज्य हो सकता है।
   c. अभाज्य संख्याओं के कोई गुणनखंड नहीं होते हैं।
   d. सभी सम संख्याएँ भाज्य संख्याएँ होती हैं।
   e. संख्याएँ 2 तथा 3 अभाज्य हैं। अन्य प्रत्येक अभाज्य संख्या के लिए अगली संख्या भाज्य है।
10. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या को तीन अलग-अलग अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?
    45, 60, 91, 105, 330.
11. अंक 2, 4 और 5 का एक बार प्रयोग करके आप तीन अंकों की कितनी अभाज्य संख्याएँ बना सकते हैं?
12. ध्यान दीजिए कि 3 एक अभाज्य संख्या है और $2 \times 3 + 1 = 7$ भी एक अभाज्य संख्या है। क्या और भी ऐसी अभाज्य संख्याएँ हैं, जिन्हें 2 से गुणन करके एक जोड़ने पर अन्य अभाज्य संख्या प्राप्त होती है? ऐसे कम से कम पाँच उदाहरण ज्ञात कीजिए।

5.3 खजानों को सुरक्षित रखने के लिए सह-अभाज्य संख्याएँ (Co-prime numbers)

कौन-से जोड़े सुरक्षित हैं?

खजाना ढूँढ़ने वाले खेल को पुन: देखते हैं। इस बार, खजाने दो संख्याओं पर रखे हैं। जम्पी को खजाना केवल तभी मिलेगा जब वह दोनों संख्याओं पर समान छलाँग आकार के द्वारा पहुँचेगा। यहाँ एक नया नियम भी है— 1 को छलाँग आकार लेने की अनुमति नहीं है।

ग्रम्पी खजाने को कहाँ रखे कि जम्पी दोनों संख्याओं तक न पहुँच सके।

क्या खजानों को 12 और 26 पर रखने से काम हो जाएगा? नहीं! छलाँग का आकार 2 लेने पर जम्पी 12 और 26 दोनों तक पहुँच सकता है।

4 और 9 के बारे में आप क्या कहेंगे? 1 छलाँग आकार का प्रयोग किए बिना जम्पी दोनों युग्मों तक नहीं पहुँच सकता। अत: ग्रम्पी जानता है कि युग्म 4 और 9 उसके लिए सुरक्षित है।

जाँचिए क्या ये युग्म सुरक्षित हैं—

a. 15 और 39 b. 4 और 15
c. 18 और 29 d. 20 और 55

सुरक्षित युग्मों के विषय में क्या विशेष है? उनमें 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। दो संख्याएँ जिनमें 1 के अतिरिक्त कोई सार्वगुणनखंड नहीं होता, **सह-अभाज्य संख्याएँ** कहलाती हैं।

उदाहरण— चूँकि 15 और 39 में 3 एक सार्व गुणनखंड है, अत: ये सह-अभाज्य नहीं है। लेकिन 4 और 9 सह-अभाज्य हैं।

- निम्नलिखित में से कौन-सा संख्या युग्म सह-अभाज्य है?

  a. 18 और 35 b. 15 और 37 c. 30 और 415

  d. 17 और 69 e. 81 और 18

- भिन्न संख्या युग्म लेकर 'इडली-वड़ा' खेल खेलते हुए, अंशु ने एक रोचक बात देखी!

  1. कभी-कभी, प्रथम सार्व गुणज, दोनों संख्याओं के गुणनफल के समान था।
  2. अन्य स्थितियों में प्रथम सार्व गुणज, दोनों संख्याओं के गुणनफल से छोटा था।

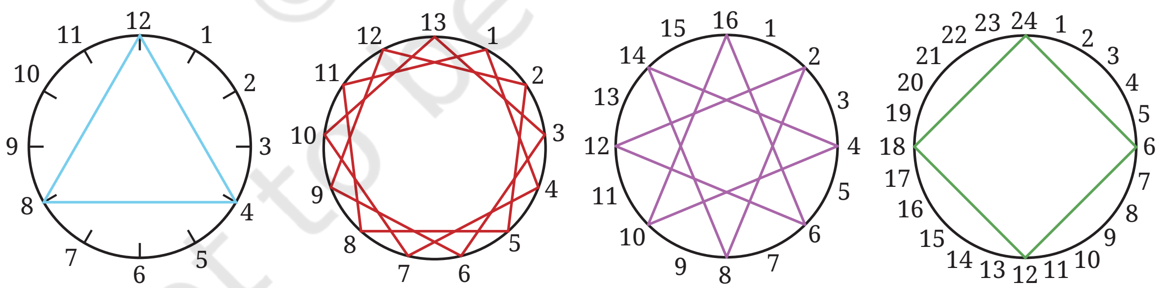
उपरोक्त प्रत्येक कथन के लिए उदाहरण खोजिए। यह संख्या युग्म के सह-अभाज्य होने से किस प्रकार संबंधित है?

गणित चर्चा

सह-अभाज्य कला

- नीचे दर्शाई गई धागे की कला को देखिए। पहली आकृति में 12 खूँटियाँ हैं। धागा हर चौथी खूँटी से बंधा है (हम कह सकते हैं कि धागे का अंतर 4 है)। दूसरी आकृति में 13 खूँटियाँ हैं और धागे का अंतर 3 है। अन्य आकृतियों के विषय में आप क्या सोचते हैं? इन आकृतियों को देखिए, अपनी जानकारी को कक्षा में साझा कीजिए और चर्चा कीजिए।

गणित चर्चा



कुछ आकृतियों में धागा प्रत्येक खूँटी से बँधा है एवं कुछ में नहीं बँधा है। क्या यह दो संख्याओं (खूटियों की संख्या और धागे के अंतर) के सह-अभाज्य होने से संबंधित है?

निम्नलिखित के लिए ऐसी ही आकृतियाँ बनाइए—

a. 15 खूँटी, धागे का अतंर 10　　b. 10 खूँटी, धागे का अंतर 7

b. 14 खूँटी, धागे का अंतर 6　　d. 8 खूँटी, धागे का अंतर 7

5.4 अभाज्य गुणनखंडन

दो संख्याओं की सह-अभाज्यता की जाँच करना

शिक्षक— क्या 56 और 63 सह-अभाज्य हैं?

अंशु और गुणा—यदि उनका सार्व गुणनखंड संख्या 1 से अलग है, तो वे सह-अभाज्य नहीं होंगी। आइए, जाँच करते हैं।

अंशु— मैं लिख सकता हूँ कि $56=14\times4$ और $63=21\times3$। इस प्रकार 14 और 4 संख्या 56 के गुणनखंड हैं। इसी प्रकार, 21 और 3 संख्या 63 के गुणनखंड हैं। अतः इनके कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं हैं, और ये संख्याएँ सह-अभाज्य हैं।

गुणा— रुको, मैं $56=7\times8$ और $63=9\times7$ भी लिख सकता हूँ। हम देख सकते हैं कि 7 दोनों संख्याओं का गुणनखंड है। अतः ये दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य नहीं हैं।

स्पष्ट रूप से गुणा सही है क्योंकि 7 एक सार्व गुणनखंड है।

लेकिन अंशु ने गलती कहाँ की?

$56 = 14 \times 4$ हमें बताता है कि 14 और 4 दोनों 56 के गुणनखंड हैं, लेकिन इससे 56 के सभी गुणनखंडों का पता नहीं चलता। क्या 63 के गुणनखंड के लिए भी ऐसा ही है?

एक अन्य उदाहरण 80 और 63 का लेते हैं। दोनों संख्याओं का गुणनखंड निकालने के अनेक तरीके हैं।

$80 = 40 \times 2 = 20 \times 4 = 10 \times 8 = 16 \times 5 = ???$

$63 = 9 \times 7 = 3 \times 21 = ???$

हमने ??? लिखा है क्योंकि इन संख्याओं के गुणनखंड करने के और भी तरीके हैं। लेकिन यदि हम उनमें से कोई एक गुणनखंड लें, उदाहरण के लिए, $80 = 16 \times 5$ और $63 = 9 \times 7$ तो इनमें कोई सार्व गुणनखंड नहीं हैं। क्या हम यहाँ यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 80 और 63 सह-अभाज्य हैं। चूँकि ऊपर अंशु की गलती दर्शाती है अत: हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। क्योंकि गुणनखंडन के अन्य तरीके भी हैं।

इसका अर्थ है कि दो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं या नहीं, इसकी जाँच करने के लिए हमें और अधिक व्यवस्थित दृष्टिकोण की आवश्यकता है।

अभाज्य गुणनखंडन

एक संख्या 56 को उदाहरण के रूप में लेते हैं जो कि भाज्य संख्या है, जैसा कि हमने देखा कि **$56 = 4 \times 14$** लिखा जा सकता है। अतः 4 और 14 दोनों 56 के गुणनखंड हैं। अब इनमें से एक लेते हैं मान लीजिए, 14 यह भाज्य संख्या है और हम इसे $14 = 2 \times 7$ लिख सकते हैं। अत: **$56 = 4 \times 2 \times 7$** यहाँ 4 एक भाज्य संख्या है और $4 = 2 \times 2$. अत: **$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$**। गुणनखंड 2 और 7 जो यहाँ उल्लेखित हैं, अभाज्य संख्याएँ हैं। अत: हम इन्हें और आगे विभाजित नहीं कर सकते।

निष्कर्ष में, हमने 56 को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा है। यह 56 का **अभाज्य गुणनखंडन** (Prime Factorization) कहलाता है। एकक गुणनखंड, अभाज्य गुणनखंड (Prime factors) कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, 2 और 7 संख्या 56 के अभाज्य गुणनखंड हैं।

1 से बड़ी प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन होता है। यहाँ अवधारणा है— भाज्य संख्या को गुणनखंडों के रूप में तब तक लिखिए जब तक केवल अभाज्य संख्या न रह जाए।

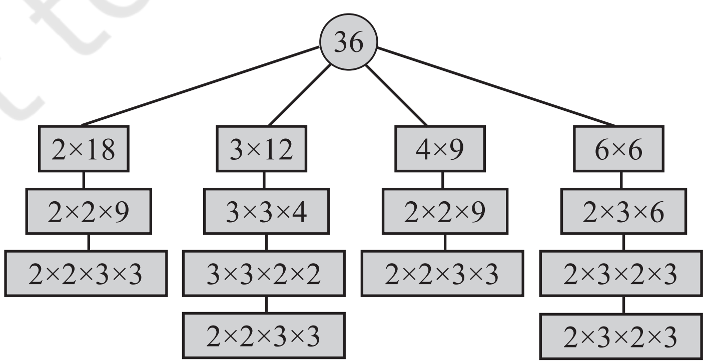
संख्या 1 का कोई अभाज्य गुणनखंडन नहीं है। यह किसी भी अभाज्य संख्या से विभाजित नहीं होता।

अभाज्य संख्या, जैसे 7 का अभाज्य गुणनखंडन क्या होगा? यह केवल 7 है (हम इसे और अधिक विभाजित नहीं कर सकते)।

आइए कुछ और उदाहरण देखें—

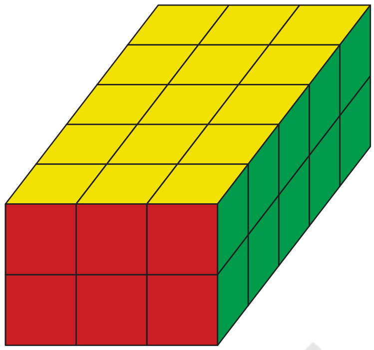
अलग-अलग तरीकों से विभाजित करते हुए हमने 63 को लिखा $3 \times 3 \times 7$ और $3 \times 7 \times 3$। क्या ये अलग-अलग हैं? वास्तव में नहीं! वही अभाज्य संख्याएँ 3 और 7 दोनों स्थितियों में दिखाई दे रही हैं। दोनों स्थितियों में संख्या 3, दो बार और संख्या 7, एक बार दिखाई दे रही है।

आकृति में, 36 के अभाज्य गुणनखंडन को चार विभिन्न तरीकों से दिखाया गया है। देखिए इन सभी चारों स्थितियों में दो बार 2 और दो बार 3 प्राप्त हो रहा है। उन्हें पुन: गुणन करके देखिए। हमें चारों स्थितियों में 36 प्राप्त होता है।



यदि अभाज्य गुणनखंडन के क्रम को छोड़ दिया जाए, तो किसी भी संख्या के लिए केवल एक अभाज्य गुणनखंडन होता है। हम नीचे बता रहे हैं कि क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। फिर भी जैसा कि हमने इन उदाहरणों में देखा कि हम परिणाम तक विभिन्न तरीकों से पहुँच सकते हैं।

क्या क्रम महत्वपूर्ण है?



इस चित्र की मदद से क्या आप समझा सकते हैं कि **$30 = 2 \times 3 \times 5$** क्यों होता है, चाहे आप 2, 3 और 5 को किसी भी तरह से गुणन करें?

जब हम संख्याओं का गुणन करते हैं, तो हम यह किसी भी क्रम में कर सकते हैं। परिणाम एक समान होगा। इसीलिए, जब दो बार 2 और दो बार 3 को किसी भी क्रम में गुणन किया जाता है तो हमें 36 प्राप्त होता है। आगे की कक्षा में, हम इसका **गुणन की क्रमविनिमेयता और साहचर्यता** के नाम से अध्ययन करेंगे।

अतः क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। साधारणतया अभाज्य संख्याओं को हम बढ़ते क्रम में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$ और $30 = 2 \times 3 \times 5$।

दो संख्याओं के गुणनफल का अभाज्य गुणनखंडन

जब हम किसी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं, तो सबसे पहले हम इसे दो गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, $72 = 12 \times 6$, इसके पश्चात् हम दोनों प्राप्त गुणनखंडों वाली प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं। उपरोक्त उदाहरण में $12 = 2 \times 2 \times 3$ और $6 = 2 \times 3$। क्या अब, आप 72 का अभाज्य गुणनखंडन बता सकते हैं?

वास्तविक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन प्राप्त करने के लिए दोनों के गुणनखंडों को एक साथ लिखना होगा।

$$72 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं— $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$। गुणन करके जाँचिए कि हमें फिर से 72 प्राप्त होता है।

अवलोकन कीजिए कि 72 के गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड कितनी बार आया।

इसकी तुलना इस तथ्य से कीजिए कि जब 12 और 6 के गुणनखंडों को एक साथ लिखते हैं तो ये संख्याएँ कितनी बार आती हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित संख्याओं का अभाज्य-गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—
   64, 105, 243, 320, 141, 1728, 729, 1024, 1331, 1000
2. किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में एक बार 2, दो बार 3 और एक बार 11 हो, तो वह संख्या क्या होगी?
3. 30 से छोटी ऐसी तीन अभाज्य संख्याएँ बताइए, जिनका गुणनफल 1955 हो?
4. बिना गुणा किए निम्न संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

   a. 56×25 b. 108×75 c. 1000×81
5. वह छोटी से छोटी संख्या क्या होगी जिसके अभाज्य गुणनखण्डन में

   a. तीन अलग अभाज्य संख्याएँ हों।

   b. चार अलग अभाज्य संख्याएँ हों।

अभाज्य गुणनखंडन, संख्याओं के अध्ययन के लिए एक मौलिक आवश्यकता है। आइए, दो उपयोगी विधियों पर चर्चा करें।

अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो संख्याओं की सह-अभाज्यता की जाँच करना

आइए पुन: संख्याएँ 56 और 63 लें। कैसे जाँचें कि ये सह-अभाज्य हैं? आइए, हम दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करते हैं—

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \text{ और } 63 = 3 \times 3 \times 7$$

हम देखते हैं कि संख्या 7, 56 का अभाज्य गुणनखंड है और 63 का भी। अत: 56 और 63 सह-अभाज्य संख्याएँ नहीं हैं।

80 और 63 के बारे में आप क्या कहेंगे? उनके अभाज्य गुणनखंड इस प्रकार हैं—

$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \text{ और } 63 = 3 \times 3 \times 7$$

इसमें कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है। क्या इस आधार पर हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वे सह-अभाज्य हैं। माना कि उनका एक भाज्य सार्व गुणनखंड है। तो क्या इस भाज्य सार्व गुणनखंड के अभाज्य गुणनखंड 80 और 63 के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित हैं?

अत: हम कह सकते हैं कि यदि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है तो वे दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

आइए, हम कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण— 40 और 231 लीजिए। इनके अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं—

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \text{ और } 231 = 3 \times 7 \times 11$$

हम देख सकते हैं कि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है जो 40 और 231 को विभाजित करता हो। संख्या 40 के अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 हैं जबकि 231 के अभाज्य गुणनखंड 3, 7 और 11 हैं। अत: 40 और 231 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

उदाहरण— 242 और 195 लीजिए। इनका अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार है—

$$242 = 2 \times 11 \times 11 \text{ और } 195 = 3 \times 5 \times 13$$

242 के अभाज्य गुणनखंड 2 और 11 हैं। 195 के अभाज्य गुणनखंड 3, 5 और 13 हैं। इनके कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड नहीं है। अतः 242 और 195 सह-अभाज्य हैं।

अभाज्य गुणनखंडन का प्रयोग करके एक संख्या का दूसरी संख्या से विभाजन की जाँच करना

हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या, दूसरी संख्या से विभाजित होती है, तो दूसरी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, पहली संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित होगा।

हम कहते हैं कि 48, संख्या 12 से विभाजित होती है क्योंकि जब हम 48 को 12 से भाग देते हैं तो शेषफल शून्य प्राप्त होता है। बिना लंबी विभाजन विधि के हम कैसे जाँचें कि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है?

उदाहरण— क्या 168 संख्या 12 से विभाजित होगी? दोनों के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \text{ और } 12 = 2 \times 2 \times 3$$

क्योंकि हम किसी भी क्रम में गुणन कर सकते हैं। अत: यह स्पष्ट है कि

$$168 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 = 12 \times 14$$

अतः 168 संख्या 12 से विभाजित होती है।

उदाहरण— क्या 75 संख्या 21 से विभाजित होती है? दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

$$75 = 3 \times 5 \times 5 \text{ और } 21 = 3 \times 7$$

जैसा कि हमने पिछले उदाहरण की चर्चा में देखा यदि 75, संख्या 21 का गुणज है तो 21 के सभी अभाज्य गुणनखंड, 75 के भी अभाज्य गुणनखंड होंगे। लेकिन 7, संख्या 21 का अभाज्य गुणनखंड है पर 75 का अभाज्य गुणनखंड नहीं है। अत: 75, संख्या 21 से विभाजित नहीं होती।

उदाहरण— क्या 42 संख्या 12 से विभाजित होता है? दोनों के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए—

$$42 = 2 \times 3 \times 7 \text{ और } 12 = 2 \times 2 \times 3$$

12 के सभी अभाज्य गुणनखंड, संख्या 42 के गुणनखंडों में सम्मिलित हैं। लेकिन 12 का अभाज्य गुणनखंडन, 42 के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित नहीं है। यह इसलिए होता है जब हम 12 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं, तो 2 दो बार आता है परंतु जब हम 42 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं तो 2 एक बार आता है। इसका अर्थ है 42, संख्या 12 से विभाजित नहीं होता।

अत: हम कह सकते हैं कि जब एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है तो दूसरी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन पहली संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित होते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. क्या निम्नलिखित संख्या युग्म सह-अभाज्य संख्याएँ हैं? पहले अनुमान लगाइए फिर अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

   a. 30 और 45 b. 57 और 85
   c. 121 और 1331 d. 343 और 216

2. क्या पहली संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है? अभाज्य गुणनखंडन का प्रयोग कीजिए।

   a. 225 और 27 b. 96 और 24
   c. 343 और 17 d. 999 और 99

3. पहली संख्या का अभाज्य गुणनखंडन $2 \times 3 \times 7$ है और दूसरी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन $3 \times 7 \times 11$ है। क्या ये दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं? क्या इनमें से एक संख्या दूसरी संख्या को विभाजित करती है?

4. गुणा कहता है, "कोई भी दो अभाज्य संख्याएँ सह-अभाज्य होती हैं।" क्या वह सही है?

5.5 संख्याओं की विभाज्यता की जाँच

अभी तक, हमने विभिन्न संदर्भों में संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात किए हैं, यह पता लगाने के लिए कि वह अभाज्य संख्या है या नहीं, अथवा संख्या युग्म सह-अभाज्य है या नहीं।

छोटी संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात करना सरल है। बड़ी संख्याओं के गुणनखंड हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, एक संख्या 8560 लेते हैं। क्या इसके 2 से 10 तक (2, 3, 4, 5,...,9,10) कोई गुणनखंड हैं?

ये संख्याएँ गुणनखंड हैं या नहीं, यह बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया के आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। क्या आप उन्हें ज्ञात कर सकते हो?

10 से विभाज्यता

आइए, 10 को उदाहरण के रूप में लेते हैं। क्या 8560 संख्या 10 से विभाजित होती है? दूसरे तरीके से हम पूछ सकते हैं कि क्या 10 संख्या 8560 का एक गुणनखंड है?

इसके लिए, हम 10 के गुणजों के पैटर्न को देखते हैं।

10 के कुछ प्रारंभिक गुणज इस प्रकार है— 10, 20, 30, 40... इस क्रम को जारी रखिए और पैटर्न का अवलोकन कीजिए।

क्या संख्या 125 संख्या 10 का गुणज है? क्या पिछले अनुक्रम में यह संख्या दिखाई देती है? क्यों या क्यों नहीं?

क्या अब आप बता सकते हैं कि 8560 संख्या 10 से विभाजित है?

इस कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 10 से विभाजित होती हैं वे '0' पर समाप्त होती हैं। क्या आप इससे सहमत हैं?

गणित चर्चा

5 से विभाज्यता

5 एक अन्य संख्या है, जिसकी विभाज्यता को सरलता से जाँचा जा सकता है। हम इसे कैसे करेंगे?

5 के गुणजों, जैसे— 5, 10, 15, 20, 25, ––– की सूची बनाकर इसकी खोज कीजिए। इन संख्याओं में आप क्या देखते हैं? क्या आप इनके अंतिम अंक में कोई पैटर्न देखते हैं?

399 से छोटी सबसे बड़ी संख्या क्या है जो 5 से विभाजित होती है? क्या 8560 संख्या 10 से विभाजित होती है?

कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 5 से विभाजित होती हैं वे या तो '0' पर समाप्त होती हैं या '5' पर समाप्त होती हैं। क्या आप सहमत हैं?

गणित चर्चा

2 से विभाज्यता

2 के कुछ प्रारंभिक गुणज 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, … हैं। आप यहाँ क्या देखते हैं? क्या इनके अंतिम अंक में आपको कोई पैटर्न दिखता है?

क्या संख्या 682, 2 से विभाजित होती है? क्या हम इसका उत्तर बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया के दे सकते हैं?

क्या संख्या 8560, 2 से विभाजित होती है? क्यों या क्यों नही?

- इस कथन पर विचार कीजिए—

जो संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं वे '0', '2', '4', '6' या '8' पर समाप्त होती हैं। क्या आप इससे सहमत हैं? 399 और 411 के बीच 2 के सभी गुणज क्या हैं?

गणित चर्चा

4 से विभाज्यता

कोई संख्या 4 से विभाजित होती है, इसकी जाँच भी आसानी से की जा सकती है।

इसके गुणजों— 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32... को देखिए।

क्या आप इनमें किसी पैटर्न को देखते हैं, जिसका उपयोग किया जा सके? 10, 5 और 2 के गुणजों के अंतिम अंकों में पैटर्न रहे हैं, जिसका उपयोग हमने इनकी विभाज्यता की जाँच करने के लिए किया। इसी प्रकार से, क्या हम अंतिम अंक देखकर बता सकते हैं कि कोई संख्या 4 से विभाजित होगी?

यह पैटर्न यहाँ लागू नहीं होता। अब 12 और 22 को देखिए इनका अंतिम अंक समान है, परंतु 12 तो 4 का गुणज है जबकि 22 नहीं है। इसी प्रकार से 14 और 24 में अंतिम अंक समान हैं, परंतु 14, संख्या 4 का गुणज नहीं है जबकि 24 है। इसी प्रकार 16 और 26 या 18 और 28 हैं। इसका अर्थ यह है कि संख्या के अंतिम अंक को देखकर हम नहीं बता सकते कि वह संख्या 4 का गुणज है या नहीं।

क्या हम इस प्रश्न का उत्तर संख्या के अंतिम के अधिक अंक देखकर दे सकते हैं? 1 से 200 के बीच 4 के गुणजों की सूची बनाइए और पैटर्न खोजिए।

- 330 और 340 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 4 से विभाज्य हों। साथ ही, 1730 और 1740, तथा 2030 और 2040 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 4 से विभाज्य हों। आप क्या देखते हैं?

- क्या 8536 संख्या 4 से विभाज्य है?

- इन कथनों पर विचार कीजिए—

  1. किसी संख्या की 4 से विभाज्यता का निर्धारण करते समय उस संख्या के केवल अंतिम दो अंक महत्व रखते हैं।
  2. यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित हो जाती है तो वह मूल संख्या भी 4 से विभाजित होती है।
  3. यदि कोई संख्या 4 से विभाजित होती है तो उसके अंतिम दो अंकों से बनी संख्या भी 4 से विभाजित होती है।

  क्या आप इससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

8 से विभाज्यता

यह जानना रोचक है कि 8 से विभाज्यता की जाँच भी सरलता से की जा सकती है। क्या इसके लिए अंतिम दो अंकों का उपयोग किया जा सकता है?

- 120 और 140 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 8 से विभाज्य हों। साथ ही 1120 और 1140 तथा 3120 और 3140 के बीच ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो 8 से विभाज्य हों। आप क्या देखते हैं?
- 8560 के अंतिम दो अंक इस प्रकार बदलिए ताकि परिणामी संख्या 8 का गुणज हो।
- इन कथनों पर विचार करें—

गणित चर्चा

1. दी गई संख्या 8 से विभाज्य है, यह पता करने के लिए केवल अंतिम 3 अंक ही महत्व रखते हैं।
2. यदि अंतिम 3 अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य है तो वह मूल संख्या भी 8 से विभाज्य होगी।
3. यदि मूल संख्या 8 से विभाज्य है, तो उसके अंतिम 3 अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य होगी।

क्या आप इससे सहमत हैं? क्यों या क्यों नहीं?

हमने देखा है कि कोई संख्या गुणनखंड है या नहीं, यह जाँचने के लिए हमेशा लंबी विभाजन विधि की आवश्यकता नहीं होती है। हमने कुछ अवलोकनों के उपयोग से 10, 5, 2, 4, 8 के लिए सरल विधियाँ निकाली। क्या हमारे पास अन्य संख्याओं के लिए भी ऐसी सरल विधियाँ हैं? हम अगली कक्षाओं में 3, 6, 7 और 9 से विभाज्यता के परीक्षण करने के सरल तरीकों पर विचार करेंगे।

आइए, पता लगाएँ

1. 2024 एक अधिवर्ष है (अर्थात फरवरी में 29 दिन होते हैं)। अधिवर्ष हर उस वर्ष में होता है जो 4 के गुणज होते हैं, सिवाय उन वर्षों के जो 100 से तो विभाजित हैं लेकिन 400 से नहीं।
   a. आपके जन्म के वर्ष से लेकर अब तक कौन-से वर्ष अधिवर्ष थे?
   b. वर्ष 2024 से 2099 तक कितने अधिवर्ष होंगे?
2. सबसे बड़ी और सबसे छोटी 4 अंकों की संख्याओं का पता लगाइए, जो 4 से विभाज्य हों और पैलिंड्रोम भी हों?
3. खोजिए और ज्ञात कीजिए कि क्या प्रत्येक कथन सदैव सत्य है, कभी-कभी सत्य है या कभी भी सत्य नहीं हैं। आप अपने तर्क के समर्थन में उदाहरण दे सकते हैं।

a. दो सम संख्याओं का योगफल, 4 का गुणज होता है।
b. दो विषम संख्याओं का योगफल, 4 का गुणज होता है।

4. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को (a) 10, (b) 5, (c) 2 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

78, 99, 173, 572, 980, 1111, 2345

5. शिक्षक ने पूछा कि क्या 14560, संख्याओं 2, 4, 5, 8 और 10 सभी से विभाज्य है। गुणा ने इनमें से केवल दो संख्याओं से 14560 की विभाज्यता की जाँच की और कहा कि 14560 उन सभी संख्याओं से भी विभाज्य है। वे दो संख्याएँ क्या हो सकती हैं?

6. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ 2, 4, 5, 8 और 10 सभी से विभाज्य हैं?

572, 2352, 5600, 6000, 77622160

7. दो संख्याएँ लिखिए जिनका गुणनफल 10000 हो। दोनों संख्याओं का इकाई का अंक शून्य नहीं होना चाहिए।

5.6 संख्याओं के साथ मनोरंजन

विशेष संख्याएँ

इस बॉक्स में चार संख्याएँ हैं। आपको कौन-सी संख्या विशेष लगती है? आपको ऐसा क्यों लगता है?

9	16
25	43

देखिए गुणा के सहपाठियों ने क्या साझा किया—

- कर्णावती कहती है, "9 विशेष है क्योंकि यह एक अंकीय संख्या है जबकि अन्य संख्याएँ दो अंकीय हैं।"
- गुरप्रीत कहता है, "9 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र संख्या है जो 3 का गुणज है।"
- मुरुगन कहता है, "16 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र सम संख्या है और 4 का एकमात्र गुणज भी।"
- गोपिका कहती है, "25 विशेष है क्योंकि यह 5 का एकमात्र गुणज है।"

- याज्ञीकी कहती है, "43 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र अभाज्य संख्या है।"
- राधा कहती है, "43 विशेष है क्योंकि यह एकमात्र ऐसी संख्या है जो वर्ग नहीं है।"

नीचे कुछ बॉक्स हैं, जिनमे प्रत्येक बॉक्स में चार संख्याएँ हैं। प्रत्येक बॉक्स के लिए यह कहने का प्रयास कीजिए की प्रत्येक संख्या अन्य की तुलना में किस प्रकार विशेष है। अपने सहपाठियों के साथ साझा कीजिए और पता लगाइए कि किसने वही कारण बताए जो आपने दिए। क्या किसी ने अलग कारण बताए जो शायद आपने न सोचे हों?

गणित चर्चा

5	7
12	35

3	8
11	24

27	3
123	31

17	27
44	65

एक अभाज्य पहेली

बाईं ओर का चित्र एक पहेली दर्शाता है। दाहिनी ओर का चित्र उस पहेली का हल है। सोचिए पहेली सुलझाने के क्या नियम हो सकते हैं?

गणित चर्चा

			75
			42
			102
170	30	63	

5	5	3	75
2	3	7	42
17	2	3	102
170	30	63	

नियम

ग्रिड को केवल अभाज्य संख्याओं से भरिए ताकि प्रत्येक पंक्ति का गुणनफल पंक्ति के दाईं ओर की संख्या हो और प्रत्येक स्तंभ का गुणनफल स्तंभ के नीचे की संख्या हो।

			105
			20
			30
28	125	18	

			8
			105
			70
30	70	28	

			63
			27
			190
45	42	171	

			343
			66
			44
28	154	231	

सारांश

- यदि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है, तो दूसरी संख्या पहली संख्या का **गुणनखंड** होगा। उदाहरण के लिए, संख्या 4, 12 का गुणनखंड है क्योंकि 12 संख्या 4 से विभाजित होती है $(12 \div 4 = 3)$।
- 2, 3, 5, 7, 11,... जैसी संख्याएँ **अभाज्य संख्याएँ** कहलाती हैं जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं, संख्या 1 और वह संख्या स्वयं।
- **भाज्य संख्याएँ** 4, 6, 8, 9, ... ऐसी संख्याएँ होती हैं जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं संख्या 1 और स्वयं के अतिरिक्त कम से कम एक और गुणनखंड। उदाहरण के लिए, 8 का एक गुणनखंड 4 है, 9 का गुणनखंड 3 है। इसलिए 8 और 9 दोनों भाज्य संख्याएँ हैं।
- प्रत्येक संख्या जो 1 से बड़ी है अभाज्य गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखी जा सकती है। इसे संख्या का **अभाज्य गुणनखंडन** कहते हैं। उदाहरण के लिए, $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$
- किसी संख्या का अभाज्य संख्या के रूप में गुणनखंडन करने का केवल एक ही तरीका है जिसमें क्रम महत्वपूर्ण नहीं है।
- दो संख्याएँ जिनका **सार्व गुणनखंड** 1 के अतिरिक्त कोई और सार्व गुणनखंड न हो सह-अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
- दो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं, यह जाँचने के लिए उन दोनों का अभाज्य गुणनखंडन करेंगे और जाँच करेंगे की क्या दोनों का कोई सार्व गुणनखंड है। यदि नहीं, तो वे दोनों सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। यदि हाँ, तो वे सह-अभाज्य नहीं हैं।
- यदि पहली संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, दूसरी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में सम्मिलित हो तो पहली संख्या दूसरी संख्या का गुणनखंड है।