

Class 9 Maths Important Questions Hindi Medium

Chapter 2 बहुपद

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए गुणनफल $(a - \frac{1}{a}) (a + \frac{1}{a}) (a^2 + \frac{1}{a^2}) (a^4 + \frac{1}{a^4})$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$(a - \frac{1}{a}) (a + \frac{1}{a}) (a^2 + \frac{1}{a^2}) (a^4 + \frac{1}{a^4})$$

$$= (a^2 - \frac{1}{a^2}) (a^2 + \frac{1}{a^2}) (a^4 + \frac{1}{a^4})$$

[सर्वसमिका $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ के अनुसार]

$$= (a^4 - \frac{1}{a^4}) (a^4 + \frac{1}{a^4}) = (a^4)^2 - (\frac{1}{a^4})^2$$

$$= a^8 - \frac{1}{a^8}$$

प्रश्न 2.

गुणनखण्ड कीजिए- $x^2 - y^2 + 2x + 1$

हल:

$$x^2 - y^2 + 2x + 1$$

$$= x^2 + 2x + 1 - y^2$$

$$= (x + 1)^2 - y^2$$

$$= (x + 1 - y)(x + 1 + y)$$

$$= (x - y + 1)(x + y + 1)$$

प्रश्न 3.

$(3x + 2y)(3x - 2y)(9x^2 + 4y)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned}(3x + 2y) (3x - 2y) (9x + 4y) \\ &= \{(3x)^2 - (2y)^2\} (9x^2 + 4y^2) \\ &= (9x^2 - 4y^2) (9x^2 + 4y^2) \\ &= (9x^2)^2 - (4y^2)^2 \\ &= 81x^4 - 16y^4\end{aligned}$$

प्रश्न 4.

k के किस मान के लिए $x^3 + 2x^2 + 5x + k$ का एक गुणनखण्ड $(x + 1)$ है?

हल:

यदि $(x + 1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है तो $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ से बहुपद का मान शून्य होना चाहिए।

$$x^3 + 2x^2 + 5x + k = 0$$

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 + 5(-1) + k = 0$$

$$-1 + 2 - 5 + k = 0$$

$$-4 + k = 0$$

$$k = 4$$

प्रश्न 5.

यदि $(x - 3)$ बहुपद व्यंजक $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ का एक गुणनखण्ड है तो $p(3)$ का मान लिखिए।

हल:

$x - 3 = 0$ या $x = 3$ व्यंजक $p(x)$ में रखने पर

$$p(3) = (3)^3 - 3(3)^2 + 4(3) - 12$$

$$= 27 - 3 \times 9 + 12 - 12$$

$$= 27 - 27 + 12 - 12$$

$$= 0$$

प्रश्न 6.

यदि $a + b = -c$ हो तो $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ का मान c के पदों में लिखिए।

हल:

प्रश्नानुसार $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

\therefore दिया गया प्रश्न $= (a + b)^3$

$= (-c)^3 = -c^3$

प्रश्न 7.

बहुपद $\left(z + \frac{3}{4}\right)\left(z + \frac{4}{3}\right)$ का मानक रूप लिखते हुए इसकी घात भी लिखिए।

हल:

दिया गया बहुपद $= \left(z + \frac{3}{4}\right)\left(z + \frac{4}{3}\right)$

$$= z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{4}{3}z + \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}$$

$$= z^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)z + 1$$

$$= z^2 + \frac{25}{12}z + 1$$

यही इसका मानक रूप है तथा इस बहुपद की घात = 2

प्रश्न 8.

सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

हल:

माना कि $p(x) = x^2 - 2x$

तब $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

तथा $p(0) = 0 - 0 = 0$

अतः 2 और 0 दोनों ही बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

प्रश्न 9.

बहुपद $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x-1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार बहुपद $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ है तथा $x - 1$ का शून्यक 1 है।

$$\therefore p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1) + 1 + 1$$

$$= 1 + 1 - 2 + 1 + 1 = 2$$

अतः शेषफल प्रमेय के अनुसार $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $(x - 1)$ से भाग देने पर शेषफल 2 प्राप्त होता

प्रश्न 10.

यदि $(x - 1)$, $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखण्ड है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

क्योंकि प्रश्नानुसार $(x - 1)$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखण्ड है इसलिए $p(1) = 0$ होगा।

$$\text{अतः } p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$$

$$\therefore 4 + 3 - 4 + k = 0$$

$$\text{या } k = -3$$

प्रश्न 11.

$(4a - 2b - 3c)$ का प्रसार कीजिए।

हल:

$$(4a - 2b - 3c)^2$$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ के अनुसार

$$= [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$

$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$

$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

प्रश्न 12.

$8x^2 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल:

$$\text{प्रश्नानुसार } 8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$$

$$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$$

$$= (2x + y + 3z) [(2x) + y + (3z) - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$

$$= (2x + y + 3z) (4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

प्रश्न 13.

उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए बहुपद $16x^2 + 24xy + 9y^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल:

$$16x^2 + 24xy + 9y^2$$

[सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का प्रयोग करने पर

$$= (4x)^2 + 2 \cdot (4x)(3y) + (3y)^2$$

$$= (4x + 3y)^2$$

प्रश्न 14.

यदि बहुपद $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 2$, $(x + 2)$ से भाज्य हो तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\therefore x + 2 = x - (-2)$$

शेषफल प्रमेय के अनुसार यदि $f(x)$, $(x + 2) = \{x - (-2)\}$ से भाज्य हो तो शेषफल $f(-2)$ के बराबर होगा।

$$\text{अर्थात् } f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 2$$

$$\therefore f(-2) = 2(-2)^4 - 6(-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) + 2$$

$$= 2 \times 16 - 6 \times -8 + 2 \times 4 + 2 + 2$$

$$= 32 + 48 + 8 + 4$$

$$= 92$$

$$\therefore \text{शेषफल} = 92$$

प्रश्न 15.

प्रदर्शित कीजिए कि बहुपद $x^{10} - 1$ और $x^{11} - 1$ का एक गुणनखण्ड $(x - 1)$ है।

हल:

$$\text{माना कि } p(x) = x^{10} - 1$$

$$\text{तथा } q(x) = x^{11} - 1$$

यह प्रदर्शित करने के लिए कि $(x - 1)$, बहुपद $p(x)$ तथा $q(x)$ का एक गुणनखण्ड है, यह दिखाना पड़ेगा कि $p(1)$

$$= 0 \text{ तथा } q(1) = 0$$

$$\therefore p(x) = x^{10} - 1 \text{ तथा } q(x) = x^{11} - 1$$

$$\Rightarrow p(1) = 1^{10} - 1 \text{ तथा } q(1) = 1^{11} - 1$$

$$\Rightarrow p(1) = 0 \text{ तथा } q(1) = 0$$

अतः यह कहा जा सकता है कि $p(x)$ तथा $q(x)$ बहुपद का $(x - 1)$ एक गुणनखण्ड है।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

सरल कीजिए $(x^2 + y^2 - z^2)^2 - (x^2 - y^2 + z^2)^2$

हल:

प्रश्नानुसार

$$(x^2 + y^2 - z^2)^2 - (x^2 - y^2 + z^2)^2$$

$$\text{सर्वसमिका } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 +$$

$2xy + 2yz + 2zx$ के अनुसार

$$= (x^2)^2 + (y^2)^2 + (-z^2)^2 + 2(x^2)(y^2) +$$

$$2(y^2)(-z^2) + 2(-z^2)(x^2) - [(x^2)^2 +$$

$$(-y^2)^2 + (z^2)^2 + 2(x^2)(-y^2)$$

$$+ 2(-y^2)(z^2) + 2(z^2)(x^2)]$$

$$= x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 -$$

$$[x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 + 2z^2x^2]$$

$$= x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$

$$- x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$

$$= 4x^2y^2 - 4z^2x^2$$

$$= 4x^2(y^2 - z^2)$$

$$= 4x^2(y - z)(y + z)$$

प्रश्न 2.

यदि $(x + \frac{1}{x}) = 9$ है तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

सर्वसमिका

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

प्रश्नानुसार $x + \frac{1}{x} = 9$ रखने पर

$$\Rightarrow (9)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot (9)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} &= (9)^3 - 27 \\ &= 729 - 27 \\ &= 702\end{aligned}$$

प्रश्न 3.

$8x^3 + 27y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $2x + 3y = 18$ तथा $xy = 12$.

हल:

प्रश्नानुसार $2x + 3y = 18$ तथा $xy = 12$

$$\text{अब } (2x + 3y)^3 = (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)(3y)(2x + 3y)$$

$$= 8x^3 + 27y^3 + 18(2x + 3y)$$

[सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ के अनुसार]

$$\Rightarrow 8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y)^3 - 18y(2x + 3y)$$

$$= (18)^3 - 18 \times 12 \times 18$$

$$= 5832 - 3888$$

$$= 1944$$

प्रश्न 4.

बहुपद $p(x) = x^3 + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{r}
x^2 - x + 1 \\
x+1 \overline{) x^3 + 1} \\
\underline{-x^3 \quad + x^2} \\
-x^2 \\
\underline{-x^2 - x} \\
x + 1 \\
\underline{-x - 1} \\
0
\end{array}$$

अर्थात् उपर्युक्त में शेषफल 0 है।

प्रश्न 5.

जाँच कीजिए कि बहुपद $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$, $2t + 1$ का एक गुणज है।

हल:

आप जानते हैं कि (1) बहुपद $2t + 1$ का गुणज केवल तब होगा जबकि $2t + 1$ से $q(t)$ को भाग देने पर कोई भी संख्या शेष न बचे। अब $2t + 1 = 0$

$$\text{या } t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore q\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \\
&= 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1 \\
&= -\frac{4}{8} + \frac{4}{4} + \frac{1}{2} - 1 \\
&= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

अतः $q(t)$ को $2t + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल = 0

अतः $2t + 1$ दिए हुए बहुपद $q(t)$ का एक गुणखण्ड है अर्थात् $q(t)$, $2t + 1$ का एक गुणज है।

प्रश्न 6.

शेषफल ज्ञात कीजिए यदि बहुपद $4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ को $(x + \frac{1}{2})$ से भाग दिया जाए।

हल:

प्रश्नानुसार $x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ दिए गए बहुपद में प्रतिस्थापित करने पर

अर्थात् माना

$$p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4$$

$$= 4 \times \frac{1}{-8} - 3 \times \frac{1}{4} - 1 - 4$$

$$= -\frac{4}{8} - \frac{3}{4} - 5$$

$$= \frac{-4 - 6 - 40}{8}$$

$$= -\frac{50}{8} = -\frac{25}{4}$$

$$\therefore \text{शेषफल} = -\frac{25}{4}$$

प्रश्न 7.

$\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 16\right)^2$ का प्रसार कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 16\right)^2$

सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ के अनुसार $\left[\frac{1}{4}a + \left(-\frac{1}{2}b\right) + 16\right]$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + (16)^2 + 2\left(\frac{1}{4}a\right) \\ &\quad \left(-\frac{1}{2}b\right) + 2\left(-\frac{1}{2}b\right)(16) + 2(16)\left(\frac{1}{4}a\right) \\ &= \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 256 - \frac{1}{4}ab - 16b + 8a \end{aligned}$$

प्रश्न 8.

यदि $2x - 3 = a$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $8x^3 - 18ax = a^3 + 27$.

हल:

प्रश्नानुसार $2x - 3 = a$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$$(2x - 3)^3 = (a)^3$$

$$\text{या } (2x)^3 - (3)^3 - 3(2x)(3)(2x - 3) = a^3$$

[\because सर्वसमिका $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ के अनुसार]

$$\text{या } 8x^3 - 27 - 18(x)(a) = a^3$$

$$\therefore 2x - 3 = a$$

$$\text{अतः } 8x^3 - 18ax = a^3 + 27 \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 9.

यदि $y = \frac{4}{3}$ एक बहुपदीय व्यंजक $f(y) = 6y^3 - 11y^2 + ky - 20$ का एक मूल है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार $f(y) = 6y^3 - 11y^2 + ky - 20$

$$\therefore f\left(\frac{4}{3}\right) = 6\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 11 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + k \times \left(\frac{4}{3}\right) - 20$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{128}{9} - \frac{176}{9} + \frac{4k}{3} - \frac{20}{1}$$
$$= \frac{4k}{3} - \frac{76}{3} = \frac{4k - 76}{3}$$

यदि $y = \frac{4}{3}$ बहुपद $f(y)$ का एक मूल है तो

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4k - 76}{3} = 0 \Rightarrow 4k - 76 = 0$$

$$\Rightarrow 4k = 76$$

$$\Rightarrow k = 19$$

प्रश्न 10.

यदि बहुपद $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4$, $g(x) = 3x - 1$ से भाज्य है तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार $g(x) = 3x - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$

\therefore शेषफल प्रमेय के अनुसार $f(x)$, $g(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ द्वारा भाज्य होगा यदि शेषफल $f\left(\frac{1}{3}\right)$ के बराबर हो।

अतः $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) - 4$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{6}{9} + \frac{2}{3} - \frac{4}{1}$$
$$= \frac{1 - 18 + 18 - 108}{27} = -\frac{107}{27}$$

$$\therefore \text{शेषफल} = -\frac{107}{27} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 11.

यदि बहुपद $2x^4 - ax^3 + 4x^2 + 2x + 1$, $(1 - 2x)$ द्वारा भाज्य है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

माना कि $p(x) = 2x^4 - ax^3 + 4x^2 + 2x + 1$

यदि यह बहुपद $p(x)$, पद $(1 - 2x)$ द्वारा भाज्य है तो $(1 - 2x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$\therefore p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - a \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{16} - \frac{a}{8} + \frac{4}{4} + \frac{2}{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} - \frac{a}{8} + 1 + 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{25}{8} = \frac{a}{8}$$

$$\Rightarrow a = 25 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 12.

यदि पद $(x^2 - 1)$ बहुपद $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ का एक गुणनखण्ड है तो प्रदर्शित करो कि $a + c + e = b + d = 0$

हल:

माना कि

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

तब $(x^2 - 1)$ इसका एक गुणनखण्ड है।

या $(x - 1)(x + 1)$ इसका एक गुणनखण्ड है।

अर्थात् $(x - 1)$ तथा $(x + 1)$ बहुपद $p(x)$ के गुणनखण्ड हैं।

या $p(1) = 0$ तथा $p(-1) = 0$

$$[\because x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1]$$

$$\text{तथा } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1]$$

$$\Rightarrow a + b + c + d + e = 0$$

$$\text{तथा } a - b + c - d + e = 0$$

इन दोनों समीकरणों को जोड़ने व घटाने पर

$$2(a + c + e) = 0 \text{ तथा } 2(b + d) = 0$$

$$\text{या } a + c + e = 0 \text{ तथा } b + d = 0$$

$$\Rightarrow a + c + e = b + d = 0 \text{ (इतिसिद्धम)}$$

प्रश्न 13.

बहुपद व्यंजक $x^6 - 7x^3 - 8$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल:

$$\text{प्रश्नानुसार } x^6 - 7x^3 - 8$$

$$\text{माना कि } y = x^3$$

$$\text{अर्थात् } (x^3)^2 - 7(x^3) - 8$$

$$\text{या } y^2 - 7y - 8$$

$$= y^2 - 8y + y - 8$$

$$= y(y - 8) + 1(y - 8)$$

$$= (y - 8)(y + 1)$$

$$y \text{ का मान रखने पर } (x^3 - 8)(x^3 + 1)$$

$$= (x^3 - 2^3)(x^3 + 1^3)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$= (x - 2)(x + 1)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - x + 1)$$