अध्याय-8 घातांक

H5X3P3

8.1 भूमिका

आप सभी जानते हैं कि शतरंज के खेल का आविष्कार भारत में हुआ था। इससे जुड़ी एक मज़ेदार कहानी इस प्रकार है– जब यहाँ के राजा को पता चला कि बुद्धिमतापूर्ण इस खेल का आविष्कारक उन्हीं के राज्य का एक विद्वान है, तो आविष्कारक को बुलाकर राजा ने कहा– "मैं तुम्हारे इस अनूठे आविष्कार के लिए तुम्हें पुरस्कार देना चाहता हूँ।" यह सुनकर विद्वान ने अपना सिर झुका दिया।

राजा ने कहा– मेरे पास पर्याप्त धन हैं। मैं तुम्हारी कोई भी इच्छा पूरी कर सकता हूँ। माँगो जो तुम्हारी इच्छा हो, डरो मत।

विद्वान ने कहा– राजन्! आपकी उदारता महान है। आप मुझे शतरंज के पहले घर (खाना) के लिए गेहूँ का एक दाना दिलाने की आज्ञा दें। दूसरे घर के लिए 2 दाने दिलाने की, तीसरे घर के लिए 4, चौथे घर के लिए 8, पाँचवे घर के लिए 16, छठवें घर के लिए 32.....

बस करो...., राजा ने क्रोधित होकर उसे बीच में रोक दिया।

तुम्हें शतरंज के पूरे 64 घरों के लिए दाने मिल जायेंगे। हर घर में दानों की संख्या पिछले घर से दुगुनी होनी चाहिए, यही तुम्हारी शर्त है ना, परन्तु यह जान लो कि इतना छोटा ईनाम मांगकर तुम मेरी उदारता का अपमान कर रहे हो।

क्या आप बता सकते हैं कि चौसठवें खाने में राजा को गेहूँ के कितने दाने देने पड़ेंगे?

गणना बहुत बड़ी होती जा रही है लेकिन मजेदार बात यह है कि यहाँ 2 का 2 के साथ बार–बार गुणा करना पड़ रहा है, जैसे–

पहले घर में दाना	:	1
दूसरे घर में दाने	:	2
तीसरे घर में दाने	:	2×2

चौथे घर में दाने	:	$2 \times 2 \times 2$
पाँचवें घर में दाने	:	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
छठवें घर में दाना	:	$2 \times 2 \times$ .... 5 बार
....	:	....
....	:	....

इसी प्रकार,

चौसठवें घर में दाना : $2 \times 2 \times$ .... 63 बार

निश्चित ही यह संख्या बहुत बड़ी होगी, पर क्या आप कहानी का अंत जानना नहीं चाहेंगे? क्या राजा आविष्कारक को यह ईनाम दे सका?

आविष्कारक को 9223372036854775809 दाने गेहूँ के देने पड़ेंगे और पूरी पृथ्वी की जमीन पर अगर गेहूँ की खेती की जाए तब भी इतनी गेहूँ नहीं मिलेगी। अब आप ही सोचिए यह है ना एक बहुत बड़ी संख्या?

$2 \times 2 \times$ .... 63 बार करने पर कितनी बड़ी संख्या प्राप्त होगी? तो क्या किसी संख्या में उसी संख्या से बार–बार गुणा करने की प्रक्रिया को लिखने का कोई और तरीका नहीं है?

घातांक या घात (Exponent or Power)

कक्षा के सभी विद्यार्थी यही सोच रहे थे कि किसी राशि का उसी राशि के साथ गुणा करने की प्रक्रिया का प्रयोग गणित में और कहाँ किया गया है?

तभी रशीदा ने हिमाशुं से कहा– "हम क्षेत्रफल निकालने में इकाई को सेमी $\times$ सेमी = सेमी^{2} लिखते हैं। इसी प्रकार आयतन निकालते समय भी इकाई को सेमी $\times$ सेमी $\times$ सेमी = सेमी^{3} लिखते हैं। क्या इसी प्रकार $2 \times 2 \times 2$ को 2^3 नहीं लिखा जा सकता?

रशीदा ने किसी राशि को उसी राशि से बार–बार गुणा करने को संक्षेप में लिखने का ठीक तरीका सुझाया। क्या आप $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ को संक्षेप में लिख सकते हैं?

जिस प्रकार $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$ है।

उसी प्रकार $a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

तथा $x \times x \times x \times x = x^4$ होता है।

आप भी किसी राशि का उसी राशि के साथ बार–बार गुणा को संक्षेप में लिखिए:

(i) $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ = ...

(ii) $r \times r \times r \times r \times r$ = ...

(iii) $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$ = ...

(iv) $101 \times 101 \times 101 \times 101 \times 101$ = ...

किसी संख्या का उसी संख्या के साथ बार–बार गुणा करने को आप संक्षेप में लिखना सीख चुके हैं। इस संक्षिप्त रूप को हम घातीय संकेतन भी कहते हैं। आइए, देखें कि इन्हें किस तरह से पढ़ा जाता है–

यहाँ 10^3 में '10' आधार (Base) और '3' घातांक (Exponent or Index) कहलाता है।

10^3 इसे 10 के ऊपर घात 3 पढ़ा जाता है। अथवा "10 की तीसरी घात" भी कहते हैं। 10^3 को 1000 का घातांकीय रूप (Exponeqntial Form) कहा जाता है। अर्थात 1000 को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप (10^3) में लिख सकते हैं।

कुछ घातों के विशेष नाम भी हैं।

जैसे – 5^2 जो 5 के ऊपर घात 2 है, इसे 5 का वर्ग (5 Squared) भी पढ़ा जाता है।

5^3 जो 5 के ऊपर घात 3 है, इसे 5 का घन (5 Cubed) भी पढ़ा जाता है।

स्वयं करके देखिए

नीचे लिखे व्यंजकों के आधार एवं घात को उनके सामने दिए गए स्थानों में लिखिए:

3^5 में आधार = 3 और घात = 5

7^{19} में आधार = ... और घात = ...

x^a में आधार = ... और घात = ...

p^q में आधार = ... और घात = ...

x^y में आधार = ... और घात = ...

अब आप समझ चुके होंगे कि घातीय रूप में लिखने का वास्तविक उद्देश्य किसी बहुत बड़े राशि को संक्षिप्त रूप में लिखना है।

जैसे सूर्य से पृथ्वी की दूरी 150000000 किलोमीटर है जो एक बहुत बड़ी राशि है इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

150000000 किमी. $= 15 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 15 \times 10^7$ किमी.

विस्तृत रूप को संक्षिप्त रूप में लिखना तो आप सीख चुके हैं। अब कुछ घातीय रूप को विस्तृत रूप में लिखिए:

1. $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$
2. $3^6 =$
3. $5^5 =$
4. $r^7 =$
5. $2^m =$

रहीम को यह समझ में नहीं आ रहा था कि वह 2^m को विस्तृत रूप में कैसे लिखें क्योंकि m का कोई निश्चित मान नहीं है। क्या आपके पास रहीम की समस्या का जवाब है?

पहले भी आपने देखा है कि शतरंज के 64 वें खाने में राजा को $2 \times 2 \times 2 \times$ .....63 बार अर्थात् 2^{63} दाने गेहूँ के देने थे।

उसी प्रकार,

$2^m = 2 \times 2 \times 2 \times$ .... m बार लिख सकते हैं।

इसी प्रकार हम x^m और y^n को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं–

$x^m = x \times x \times x \times$ ....m बार, और

$y^n = y \times y \times$ ....n बार लिख सकते हैं।

किसी संख्या का घातांकीय रूप उसके अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ : $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ (अभाज्य गुणनखण्ड) $= 2^3 \times 5^3$ (अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के गुणनफल वाला रूप)

उदाहरण–1. 64 को 2 की घात के रूप में लिखें।

हल : $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः हम कह सकते हैं कि $64 = 2^6$

उदाहरण–2. 8^2 और 2^8 में कौन बड़ा है?

हल : $8^2 = 8\times8 = 64$

$2^8 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 256$ है। स्पष्टतः $2^8 > 8^2$

उदाहरण–3. (1^6) का मान ज्ञात कीजिए।

$(1^6) = 1\times1\times1\times1\times1\times1 = 1$ (वास्तव में, 1 की कोई भी घात 1 के बराबर होती है।)

उदाहरण–4. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 144 (ii) 216

(i) $144 = 72\times2$
$= 36\times2\times2$
$= 18\times2\times2\times2$
$= 9\times2\times2\times2\times2$
$= 3\times3\times2\times2\times2\times2$
$= 3^2\times2^4$ (वांछित रूप)

(ii) $216 = 108\times2$
$= 54\times2\times2$
$= 27\times2\times2\times2$
$= 9\times3\times2\times2\times2$
$= 3\times3\times3\times2\times2\times2$
$= 3^3\times2^3$ (वांछित रूप)

आधार ॠणात्मक पूर्णांक भी हो सकता है –

जैसे– $(-2)^3 = (-2)\times(-2)\times(-2) = -8$ है।

$(-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 16$ है।

स्पष्ट है आधार ऋणात्मक पूर्णांक होने पर, जब घात विषम संख्या हो तो मान ऋणात्मक प्राप्त होता है। तथा जब घात सम संख्या हो तो मान धनात्मक प्राप्त संख्या होती है।

उदाहरण–5. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-1)^4$ (iii) $(-10)^4$ (iv) $(-5)^3$

हल : (i) $(-1)^5 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = -1$

(ii) $(-1)^4 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = +1$

(iii) $(-10)^4 = (-10)\times(-10)\times(-10)\times(-10) = 100\times(-10)\times(-10) = 100\times 100 = 10000$

(iv) $(-5)^3 = (-5)\times(-5)\times(-5) = 25\times(-5) = -125$

प्रश्नावली–8.1

1. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) $5\times5\times5\times5$ (ii) $c\times c\times c$ (iii) $2\times2\times3\times3\times3$

(iv) $6\times6\times b\times b$ (v) $a\times a\times b\times b\times b\times b\times b\times d$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) 3^3 (ii) 6^4 (iii) 9^3 (iv) 5^4 (v) 4^4

3. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन (रूप) में व्यक्त कीजिए–

(i) 343 (ii) 512 (iii) 729 (iv) 3125

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक में कौन बड़ा है–

(i) 4^3 या 3^4 (ii) 2^5 या 5^2 (iii) 2^8 या 8^2 (iv) 100^2 या 2^{100}

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को उनके अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 1200 (ii) 720 (iii) 1080 (iv) 2250 (iv) 3600

6. सरल कीजिए–

(i) 3×10^2 (ii) $7^2\times3^2$ (iii) $(-1)^5\times7^3$

(iv) 0×10^2 (v) $3^4\times2^3$ (vi) $3^2\times10^4$

7. सरल कीजिए–

(i) $(-3)^3$ (ii) $(-1)\times(-2)^3$ (iii) $(-4)^2\times(-3)^2$

(iv) $(-2)^3\times(-10)^4$ (v) $(-5)^2\times(2)^4$

8. निम्न संख्याओं की तुलना कीजिए–

(i) 5×10^{14} ; 4×10^{7} (ii) 2.6×10^{12}; 1.6×10^{8}

(iii) 2.7×10^{11} ; 3.0×10^{15} (vi) 1.008×10^{15} ; 2.009×10^{20}

9. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिए–

(i) $\frac{8}{729}$ (ii) $\frac{81}{343}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

8.3 घातांकों के नियम

8.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

आप जानते हैं कि $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ होता है। इसमें 2 के गुणकों का अलग–अलग समूह बनाकर कई प्रकार से लिख सकते हैं। जैसे:–

$$2^5 = 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^1 \times 2^4$$
$$2^5 = (2 \times 2)\ (2 \times 2 \times 2) = 2^2 \times 2^3$$
$$2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^3 \times 2^2$$
$$2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2 = 2^4 \times 2^1$$

यहाँ 2^5 को 2 के आधार वाले व्यंजकों में कई प्रकार से लिखा गया है। आप भी नीचे दिए गए घातीय व्यंजकों को समान आधार वाले दो व्यंजकों के गुणांक के रूप में लिखिए और घातों का योगफल प्राप्त कीजिए:–

क्र.	घातीय व्यंजक	विस्तृत रूप में लिखकर दो समूहों में बाँटना (समूह अपनी इच्छा से बनाइए)	प्रत्येक समूह को घातीय व्यंजक के रूप में लिखिए	घातों का योगफल
1.	a^7	$\underline{a \times a \times a \times a} \times \underline{a \times a \times a}$	$a^4 \times a^3$	$4 + 3 = 7$
2.	x^5			
3.	y^{10}			
4.	27^7			
5.	7^{12}			

ऊपर घातीय व्यंजकों के विस्तारित रूप को देखिए तथा नीचे दिए हुए रिक्त स्थानों को भरिए–

$a^7 = a^5 \times \boxed{a^2}$ $x^5 = x^3 \times \boxed{}$ $y^{10} = y^7 \times \boxed{}$

$27^7 = 27^4 \times \boxed{}$ $7^{12} = 7^8 \times \boxed{}$

क्या दो समान आधार वाली राशियों का गुणा करने पर उन राशियों के घातों का गुणनफल वाली राशि के घात से कोई सम्बन्ध है?

आइए देखें कि समान आधार वाली घातीय व्यंजकों का गुणा कैसे होता है:–

$x^3 \times x^4 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^7 = x^{(3+4)}$

$x^5 \times x^3 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8 = x^{(5+3)}$

$y^{19} \times y^{21} =$ ($y \times y \times$ .... 19 बार) $\times$ ($y \times y \times$ .... 21 बार)

क्या आप बता सकते हैं कि ऊपर y का y के साथ कितनी बार गुणा होगा? गुणनफल में y का घात क्या होगा?

y का y के साथ $19 + 21 = 40$ बार गुणा हो रहा है।

अतः गुणनफल y^{40} होगा।

अतः हम कह सकते हैं कि "जब दो समान आधार वाले घातीय राशियों का गुणा होता है, तो गुणनफल में आधार वही रहता है तथा घात आपस में जुड़ जाते हैं।"

जैसे–

$3^{99} \times 3^{13} = 3^{(99+13)} = 3^{112}$

क्या आप $x^m \times x^n$ का गुणनफल बता सकते हैं?

$x^m \times x^n = x \times x$..........m बार और n बार अर्थात् (m+n) बार गुणा हो रहा है।

अतः $\mathbf{x^m \times x^n = x^{m+n}}$ (नियम–1)

स्वयं करके देखिए

(i) $3^3 \times 3^4 = 3^{\square}$ (ii) $(-12)^2 \times (-12)^6 = -12^{\square}$

(iii) $b^2 \times b^3 = b^{\Box}$ (iv) $c^{10} \times c^{20} = c^{\Box}$

(v) $p^3 \times p^2 = p^{\Box}$ (iv) $a^3 \times a^2 \times a^7 = a^{\Box}$

8.3.2 एक ही आधार वाली घातों का विभाजन

फातिमा ने मोनू से पूछा, समान आधार वाली घातीय राशियों को गुणा करना तो हमने सीख लिया, समान आधार वाली घातीय राशियों का भाग कैसे करेंगे?

मोनू ने कहा, चलो करके देखते हैं।

$$\frac{2^7}{2^5} = \frac{2\times2\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}} = 2 \times 2 = 2^2$$

रीना और जमाल ने भी इसी प्रकार के सवाल हल किए:-

(i) $$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3\times3\times3\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}} = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

(ii) $$\frac{7^9}{7^6} = \frac{7\times7\times7\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}} = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$$

फातिमा ने सभी हलों को देखकर साथियों से कहा कि जिस तरह दो समान आधार वाली घातीय राशियों का गुणा करने पर घात जुड़ते हैं उसी प्रकार दो समान आधार वाली घातीय राशियों में भाग क्रिया करने पर अंश के घातांक में से हर का घातांक घटा देते हैं।

जैसे– $2^7 \div 2^5$ के भागफल का घात $7 - 5 = 2$ होता है, $3^5 \div 3^2$ के भागफल का घात $5 - 2 = 3$ एवं $7^9 \div 7^6$ के भागफल का घात $9 - 6 = 3$ है। अर्थात्

$a^m \div a^n$ के भागफल का घात $m - n$ होगा।

अर्थात् $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (नियम–2)

तभी मोनू ने कहा "यह तो ठीक है पर यदि अंश और हर की घातीय संख्याएं समान हों तो क्या होगा? चलो हल करके देखें, जैसे:-

$\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0$ परन्तु $\frac{7^5}{7^5} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = 1$ $\therefore\ 7^0 = 1$

जैसे $\frac{p^n}{p^n} = 1$ होगा परन्तु सूत्र से

$\frac{p^n}{p^n} = p^{n-n} = p^0$

$p^0 = 1$ (नियम–3)

जहाँ $p \neq 0$

अब ज़रा निम्न संख्याओं पर विचार करें।	
$\frac{1}{5^2} = \frac{5^0}{5^2} = 5^{0-2} = 5^{-2}$	($5^0 = 1$ से)
$\frac{1}{6^{35}} = \frac{6^0}{6^{35}} = 6^{0-35} = 6^{-35}$	($6^0 = 1$ से)
$\frac{1}{4^{90}} = \frac{4^0}{4^{90}} = 4^{0-90} = 4^{-90}$	($4^0 = 1$ से)

इन प्रश्नों का अवलोकन करते हुए फातिमा ने विचार किया कि यदि घातीय संख्याओं में हर को अंश के स्थान पर ले जाएँ तब उनके घात के चिह्न ऋणात्मक हो जाते हैं, अर्थात् यदि हमारे पास

$\frac{1}{a^4}$ हो तब $\frac{1}{a^4} = \frac{a^0}{a^4} = a^{0-4} = a^{-4}$ होगा

यदि $\frac{1}{a^m}$ हो तब $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$

अतः $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$

परन्तु यदि अंश को हर में ले जाएँ तो क्या होगा, जैसा हमने ऊपर उदाहरणों में देखा है।

$\frac{1}{7^{-3}} = 7^3$ या $\frac{1}{a^{-4}} = a^4$ या $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ इसका मतलब यह है कि **जब धातांकों में अंश को हर में ले जाएंगे तब भी घात का चिह्न बदल जाएगा।**

स्वयं करके देखिए

(i) $10^8 \div 10^3 = 10^{\square}$ (ii) $9^8 \div 9^7 = 9^{\square}$

(iii) $21^{15} \div 21^{13} = 21^{\square}$ (iv) $b^{10} \div b^8 = b^{\square}$

(v) $d^{100} \div d^{80} = d^{\square}$

8.3.3 एक घात की घात लेना

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए–

(i) $(2^3)^2$ को सरल कीजिए–

हल : $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$ (चूँकि $a^m \times a^n = a^{m+n}$ है।)

$= 2^6$

$= 2^{3\times2}$

(ii) $(3^4)^2$ को सरल कीजिए–

हल $(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4$

$= 3^{4+4}$

$= 3^8$

$= 3^{4\times2}$

(iii) $(a^m)^3 = a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m}$

$= a^{3m}$

$= 3^{3\times m}$

उपरोक्त से हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि किसी शून्येतर पूर्णांक 'a' के लिए $(a^m)^n = a^{m\times n}$ होता है जहाँ m और n पूर्णांक हैं।

स्वयं करके देखिये

सरल करके उत्तर को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(7^2)^3$ (ii) $(2^2)^{50}$ (iii) $(7^{50})^3$

(iv) $(a^3)^2$ (v) (4^3) (vi) $(d^4)^8$

8.3.4 समान घातांकों वाली घातों का गुणन

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए:

(i) $2^4 \times 3^4$ को सरल कीजिए।

$2^4 \times 3^4 = (2\times2\times2\times2) \times (3\times3\times3\times3)$

$= (2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)$

$= 6\times6\times6\times6$

$= 6^4$

यहाँ आधार 6, 2 और 3 का गुणनफल है।

(ii) $4^3 \times 3^3$ को सरल कीजिए।

$$4^3 \times 3^3 = (4\times4\times4) \times (3\times3\times3)$$
$$= (4\times3)\times(4\times3)\times(4\times3)$$
$$= 12\times12\times12$$
$$= 12^3$$

यहाँ 12 आधार 4 और 3 का गुणनफल है।

(iii) $3^3 \times a^3$ को सरल कीजिए।

$$3^3 \times a^3 = (3\times3\times3) \times (a\times a\times a)$$
$$= (3\times a)\times(3\times a)\times(3\times a)$$
$$= (3a)^3 \qquad (\text{यहाँ } 3\times a = (3a)^3)$$

(iv) $a^3 \times b^3$ को सरल कीजिए।

$$a^3 \times b^3 = (a\times a\times a) \times (b\times b\times b)$$
$$= (a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$$
$$= (a\times b)^3$$
$$= (ab)^3 \qquad (\text{यहाँ } a\times b = ab \text{ है।})$$

व्यापक रूप में, किसी शून्येतर (Non-Zero) पूर्णांक के लिए $a^m \times b^m = (ab)^m$ होता है। जहाँ m एक पूर्णांक है।

उदाहरण–6. निम्नलिखित पदों को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) $(5\times4)^3$ (ii) $(4a)^5$ (iii) $(-3n)^3$

हल : (i)
$$(5\times4)^3 = (5\times4)\times(5\times4)\times(5\times4)$$
$$= (5\times5\times5)\times(4\times4\times4)$$
$$= 5^3\times4^3$$

(ii)
$$(4a)^5 = 4a\times4a\times4a\times4a\times4a$$
$$= (4\times4\times4\times4\times4)\times(a\times a\times a\times a\times a)$$
$$= 4^5\times a^5$$

(iii) $(-3n)^3 = (-3\times n)^3$

$= (-3\times n)(-3\times n)(-3\times n)$

$= (-3\times -3\times -3)\times(n\times n\times n)$

$= -3^3\times n^3$

स्वयं करके देखिए

$a^m \times b^m = (ab)^m$ का प्रयोग करके रूप बदलिए–

(i)	$5^3 \times 2^3$	(ii)	$3^2 \times b^2$	(iii)	$a^2 \times c^2$
(iv)	$4^6 \times (-2)^6$	(v)	$(-2^4) \times (-3)^4$	(vi)	$(ab)^3$
(vii)	$(-2p)^3$	(viii)	$(2c)^4$	(ix)	$(2\times 3)^5$

8.3.5 परिमेय संख्याओं की घातें

परिमेय संख्याओं के कुछ घातांकों पर विचार कीजिए–

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}$$

$$= \frac{5\times5\times5\times5}{7\times7\times7\times7} = \frac{5^4}{7^4}$$

$$\left(-\frac{3}{11}\right)^5 = (-1)^5\times\left(\frac{3}{11}\right)^5$$

$$= -1\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11} = -1\times\frac{3\times3\times3\times3\times3}{11\times11\times11\times11\times11}$$

$$= -1\times\frac{3^5}{11^5} = -\frac{3^5}{11^5}$$

8.3.6 समान घातांकों वाली घातों से विभाजन

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए–

(i) $\frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5} = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

(ii) $\frac{a^5}{b^5}=\frac{a\times a\times a\times a\times a}{b\times b\times b\times b\times b}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^5$

व्यापक रूप में, $a^m \div b^m=\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$ जहाँ, a और b कोई दो शून्येतर पूर्णांक है तथा m और n एक पूर्णांक है।

उदाहरण–7. निम्न को विस्तार में कीजिए :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$ (iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5$

हल : (i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$

(ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{5^4}=\frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{5\times5\times5\times5}$

(iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{p^5}{q^5}=\frac{p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q}$

8.4 विविध उदाहरण

उदाहरण–8. $(5^2)\times3$ और $(5^2)^3$ में बड़ा कौन है।

हल : $(5^2)\times3=5\times5\times3$ (5^2 को 3 से गुणा)

$=75$

$(5^2)^3 = 5^2\times5^2\times5^2$ (5^2 का स्वयं से 3 बार गुणा).

$= 15625$

अत: $(5^2)^3 > (5^2)\times3$

उदाहरण–9. $9\times9\times9$ के लिए आधार 3 लेते हुए, इसे घातांकीय रूप में लिखिए।

प्रश्न से, $9\times9\times9 = 9^3 = (3^2)^3$ $= 3^{2\times3}\ \left(\because (a^m)^n = a^{mn}\right)$

$= 3^6$

उदाहरण–10. सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए।

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^4$ (ii) $2^3\times2^2\times5^5$ (iii) $\left\{(2^3)^2\times5^6\right\}\times3^6$

(iv) $8^2\div2^3$ (v) $\left(3^2\times3^4\right)\div3^3$

हल : (i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^4 = \left(3^{7-2}\right)\times3^4 \quad \left(\because \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right)$

$= 3^5\times3^4$

$= 3^{5+4} \quad \left(\because a^m\times a^n = a^{m+n}\right)$

$= 3^9$

(ii) $2^3\times2^2\times5^5 = \left(2^3\times2^2\right)\times5^5$

$= 2^5\times5^5 \quad \left(\because a^m\times a^n = a^{m+n}\right)$

$= (2\times5)^5 \quad \left(\therefore a^m\times b^m = (ab)^m\right)$

$= 10^5$

(iii) $\left\{(2^3)^2\times5^6\right\}\times3^6$

$= \left(2^6\times5^6\right)\times3^6 \quad \left(\because (a^m)^n = a^{mn}\right)$

$= \left\{(10)^6\times3^6\right\} \quad \left(\because a^m\times b^m = (ab)^m\right)$

$= (10\times3)^6$

$= (30)^6$

(iv) $8^2 \div 2^3$

$\because\ 8 = 2\times2\times2 = 2^3$

$\therefore\ 8^2 = \left(2^3\right)^2$

$\therefore 8^2 \div 2^3 = \left(2^3\right)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3$

$= 2^{6-3} = 2^3$

(v) $\left(3^2\times3^4\right)\div3^3$

$= \left(3^{2+4}\right)\div3^3 \ \left(a^m\times a^n = a^{m+n}\right)$

$= 3^6\div3^3 \ \left(a^m\div a^n = a^{m-n}\right)$

$= 3^{6-3} = 3^3$

उदाहरण–11. सरल कीजिए

(i) $\dfrac{2^3\times3^4\times4}{3\times32}$ (ii) $\dfrac{2\times3^4\times2^5}{9\times4^2}$ (iii) $\dfrac{12^4\times9^3\times4}{6^3\times8^2\times27}$

(iv) $2^3\times a^3\times5a^4$ (v) $\dfrac{4^5\times a^8b^3}{4^5\times a^5b^2}$ (vi) $\dfrac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

हल : (i) $\dfrac{2^3\times3^4\times4}{3\times32} = \dfrac{2^3\times3^4\times2^2}{3\times2^5}\ \left(\because 4=2^2, 32=2^5\right)$

$= \dfrac{2^{3+2}\times3^4}{3\times2^5} = \dfrac{2^5\times3^4}{3\times2^5}$

$= 2^{5-5}\times3^{4-1} = 2^0\times3^3$

$= 1\times27 = 27$

(ii) $\dfrac{2\times3^4\times2^5}{9\times4^2} = \dfrac{2\times3^4\times2^5}{3^2\times\left(2^2\right)^2} = \dfrac{2\times2^5\times3^4}{3^2\times2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+5}\times3^4}{2^4\times3^2} = \dfrac{2^6\times3^4}{2^4\times3^2}$

$= 2^{6-4}\times3^{4-2} = 2^2\times3^2 = 4\times9 = 36$

(iii) $\frac{12^4\times9^3\times4}{6^3\times8^2\times27}$ $=\frac{(2^2\times3)^4\times(3^2)^3\times2^2}{(2\times3)^3\times(2^3)^2\times3^3}$ $=\frac{(2^2)^4\times3^4\times3^{2\times3}\times2^2}{2^3\times3^3\times2^{3\times2}\times3^3}$

$=\frac{2^8\times2^2\times3^4\times3^6}{2^3\times2^6\times3^3\times3^3}$ $=\frac{2^{8+2}\times3^{4+6}}{2^{3+6}\times3^{3+3}}$ $=\frac{2^{10}\times3^{10}}{2^9\times3^6}$

$=2^{10-9}\times3^{10-6}$ $=2^1\times3^4$ $=2\times81$ $=162$

(iv) $2^3\times a^3\times5a^4$

$=2^3\times a^3\times5\times a^4$

$=2^3\times5\times a^3\times a^4$

$=8\times5\times a^{3+4}$

$=40a^7$

(v) $\frac{4^5\times a^8b^3}{4^5\times a^5b^2}$

$=4^{5-5}\times a^{8-5}\times b^{3-2}$

$=4^0\times a^3\times b^1$

$=1a^3b$

$=a^3b$

(v) $\frac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$ $=\frac{2^8\times a^5}{(2^2)^3\times a^3}$ $=\frac{2^8\times a^5}{2^6\times a^3}$

$=2^{8-6}\times a^{5-3}$ $=2^2a^2$ $=4a^2$

प्रश्नावली–8.2

1. सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए:

(i) $7^2\times7^4\times7^8$ (ii) $3^{10}\div3^6$ (iii) $d^2\times d^3$

(iv) $5^x\times5^2$ (v) $(5^3)^2\div5^3$ (vi) $3^5\times5^5$

(vii) $a^4\times b^4$ (viii) $(2^{20}\div2^{10})\times2^3$ (ix) $9^p\div9^3$

2. सरल कीजिए और घातांकीय रूप में उत्तर लिखिए:

(i) $\frac{2^3\times3^4\times4}{3^2\times32}$ (ii) $\left[(5^3)^2\times5^3\right]\div5^6$ (iii) $25^5\div5^4$

(iv) $3^0+4^0+5^0$ (v) $3^0\times4^0\times5^0$ (vi) $\left(4^0+5^0\right)\times2^0$

(vii) $\frac{11^6\times13^3\times3}{39\times11^2}$ (viii) $\frac{5^7}{5^4\times5^3}$ (ix) $\left(3^3\times3\right)^3$

(x) $\frac{5^8\times a^5}{25^3\times a^3}$

3 अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 1152 (ii) 64×81 (iii) 540

(iv) $27\times48\times72$ (v) $9\times6\times15\times4$

4 नीचे दिए गए कथनों में सही/गलत छांटिए तथा अपने उत्तर का कारण भी दीजिए:

(i) $10^0=(1000)^0$ (ii) $4^3\times3^2=12^5$ (iii) $2^5=5^2$

(iv) $10\times10^6=100^6$

5. सरल कीजिए :

(i) $\frac{\left(3^2\right)^5\times5^3}{9^4\times5^2}$ (ii) $\frac{9^2\times3^2\times a^8}{3^7\times a^3}$ (iii) $\frac{3^5\times10^5\times25}{5^7\times6^5}$

8.5 दशमलव संख्या पद्धति

हम जानते हैं कि–

$$56832 = 5\times10000 + 6\times1000 + 8\times100 + 3\times10 + 2\times1$$

हम इसे 10 की घातों का प्रयोग करते हुए घातांकिय रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

$$56832 = 5\times10^4 + 6\times10^3 + 8\times10^2 + 3\times10^1 + 2\times10^0$$

ध्यान दीजिए $10000 = 10^4$, $1000=10^3$, $100=10^2$, $10=10^1$ तथा $1=10^0$ है।

यहाँ 10 के घातांक 4 से एक–एक घटते हुए 0 तक आ जाते हैं।

8.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

निम्नलिखित प्रतिरूप (Pattern) को देखिए–

1. $14335 = 1433.5 \times 10 = 1433.5 \times 10^1$
2. $14335 = 143.35 \times 100 = 143.35 \times 10^2$
3. $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$
4. $14335 = 1.4335 \times 10000 = 1.4335 \times 10^4$
5. $14335 = .14335 \times 100000 = .14335 \times 10^6$

उपरोक्त सभी में चौथा रूप संख्या का मानक रूप (standard form) है। जब किसी संख्या को 1.0 एवं 9.9 या इसके बीच की एक दशमलव संख्या और 10 की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

ऊपर के तीसरे रूप की संख्या $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$ मानक रूप में है? नहीं क्योंकि $14.335 > 1.0$ एवं 9.9 तथा इसके बीच की किसी भी दशमलव संख्या से। अब क्या संख्या $.14335 \times 10^6$ मानक रूप में है? नहीं क्योंकि $.14335 < 1.0$ एवं 9.9 तथा इसके बीच की किसी भी दशमलव संख्या से।

ध्यान दीजिए 14335 को 14.335×1000 या $.14335 \times 100000$ और 14.335×10^3 या $.14335 \times 10^5$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। परन्तु यह14335 का मानक रूप नहीं है।

हमारी आकाश गंगा के केन्द्र से सूर्य की दूरी अर्थात्–

300,000,000,000,000,000,000 मी. को 3.0×10^{20} मी. के रूप में लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार पृथ्वी का द्रव्यमान

= 5,976,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा.

$= 5.976 \times 10^{24}$

क्या आप इस बात से सहमत है कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या उस 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल या सुविधाजनक है?

अब यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान

= 86,800,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा.

$= 8.68 \times 10^{25}$ किग्रा. है।

अब, उपरोक्त दोनों व्यंजकों में केवल 10 की घातों की तुलना करके ही आप यह कह सकते हैं कि यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी से अधिक है।

उदाहरण–12. निम्नलिखित संख्याओं को मानकरूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 725.34 (ii) 956,230 (iii) 434,000 (iv) 800,403,000

हल: (i) $725.34 = 7.2534 \times 100 = 7.2534 \times 10^2$

(ii) $956230 = 9.56230 \times 100000 = 9.5623 \times 10^5$

(iii) $434000 = 4.34000 \times 100000 = 4.34 \times 10^5$

(iv) $800403000 = 8.00403 \times 100000000 = 8.00403 \times 10^8$

ऊपर के उदाहरण से स्पष्ट है कि किसी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करते समय 10 का घातांक निम्न प्रकार से भी प्राप्त कर सकते हैं:–

सर्वप्रथम, दशमलव बिन्दु से बाईं ओर के अंकों की संख्या गिनते हैं। दशमलव बिन्दु नहीं रहने पर बिन्दु की कल्पना संख्या के दाएँ सिरे पर कर लेते हैं।

फिर प्राप्त संख्या में से 1 घटाकर जो प्राप्त होता है, वही 10 का घातांक होता है।

उदाहरण (1) में संख्या 725.34 है, इसमें दशमलव के बाएँ तरफ तीन अंक है, अतः 10 की घात $= 3-1 = 2$ होगा।

अतः $725.34 = 7.2534 \times 10^2$

इसी प्रकार उदाहरण (2) में संख्या 956230 में दाएँ सिरे पर दशमलव की कल्पना करने पर दशमलव के बाएँ तरफ कुल 6 अंक है अतः 10 की घात $= 6-1 = 5$ होगा।

अतः $956230 = 9.5623 \times 10^5$

प्रश्नावली– 8.3

1. **निम्नलिखित संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखिए–**

(i) 389505 (ii) 2005183 (iii) 230829 (iv) 30079 (v) 8324750

2. **निम्नलिखित विस्तारित रूपों में से प्रत्येक के लिए संख्या ज्ञात कीजिए–**

(i) $9 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

(ii) $7 \times 10^5 + 8 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

(iii) $6 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

(iv) $8 \times 10^5 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1$

3. **निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए–**

(i)	7,00,00,000	(ii)	8,000,000	(iii)	416,000,000
(iv)	456,234	(v)	9634.21	(vi)	72439.62

4. **निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए–**

(i) पृथ्वी का व्यास 12756000 मी. है।

(ii) मार्च 2001 में भारत की जनसंख्या 1,027,000,000 थी।

(iii) सूर्य का व्यास 1,400,000,000 मी. है।

(iv) निर्वात स्थान में प्रकाश की चाल (या वेग) 300,000,000, मी./से. है।

(v) सौर मंडल 12,000,000,000 वर्ष पुराना आकलित किया गया है।

(vi) एक आकाश गंगा में औसतन 100,000,000,000 तारे हैं।

(vii) आकाश गंगा के मध्य से सूर्य की दूरी 300,000,000,000,000,000,000 मी. आंकलित की गई है।

(viii) 1.8 ग्राम भार वाली पानी की एक बूंद में 60,230,000,000,000,000,000,000 अणु होते हैं।

(ix) पृथ्वी में 1,353,000,000 किमी.^{3} समुद्र जल है।

5. **निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली दूरियों को मानक रूप में व्यक्त करके घटते क्रम में सजायें।**

(i) सूर्य और शनि ग्रह के बीच की दूरी 1,433, 500,000,000 मी. है।

(ii) शनि और यूरेनस ग्रहों के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 मी. है।

(iii) सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 149,600,000,000 मी. है।

(iv) पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच की दूरी 384,000,000 मी. है।

हमने सीखा

1. बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिखते हैं, जिससे बड़ी संख्याओं को पढ़ने, समझने, तुलना करने और उन पर संक्रियाएँ करने में सरल व सुविधाजनक होता है।

2. संख्या $100000 = 10^5$; इसे 10 के ऊपर घात 5 पढ़ा जाता है। हम यह भी कहते हैं कि 10 की पाँचवीं घात 100000 है। यहाँ 10 आधार है तथा 5 इसका घातांक है।

3. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती है, जो इस प्रकार है–
किन्हीं शून्येतर पूर्णांकों a और b तथा पूर्ण संख्याओं m और n के लिए,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}, m > n$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

(vii) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$
$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$