अध्याय-15 परिमाप और क्षेत्रफल

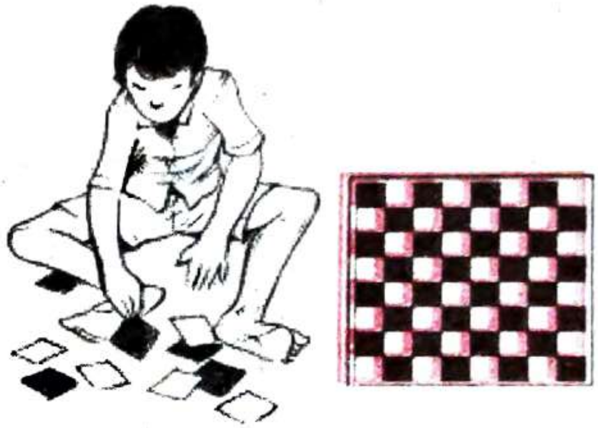
D4I2R9

15.1 भूमिका

आपने मेज, किताब के पन्ने, दरवाजे और खिड़की के पल्ले, चकले, कमरे के फर्श, ब्लैकबोर्ड, बेंच आदि को देखा है। इनके चारों ओर के ऊपरी किनारों को मापें। इनके चारों ओर के किनारे की लम्बाई के कुल माप को परिमाप या परिमिति कहते हैं। इन वस्तुओं के द्वारा किसी तल के घेरे गये भाग को उसका क्षेत्रफल कहते हैं। आइए कुछ तल की आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल के बारे में चर्चा करें।

15.2 पुनरवलोकन

निहाल के पास 3 सेमी. भुजा वाले बहुत से काले व सफ़ेद वर्ग हैं वह वर्गों को लकड़ी के बोर्ड पर चिपकाकर एक शतरंज बोर्ड बनाना चाहता हैं।


आकृति—15.1

शतरंज बोर्ड बनाने के लिए कितने काले व सफ़ेद वर्गों की जरूरत होगी? इन वर्गों से शतंरज बोर्ड बनाने के लिए कितने बड़े लकड़ी के बोर्ड की जरूरत होगी? उस बोर्ड की लम्बाई चौड़ाई क्या होगी? यदि निहाल इस शतरंज बोर्ड के चारों ओर 3 सेमी. चौड़ा फ्रेम भी लगा दे तो शतरंज बोर्ड कितनी जगह घेरेगा?

चूँकि एक शतरंज बोर्ड में 64 खाने होते हैं और बराबर संख्या में काले व सफ़ेद खाने होते हैं। अतः 32–32 क्रमशः काले व सफ़ेद खाने होंगे। पुनः यदि प्रत्येक खाना एक वर्ग सेमी. का है तो उसे 64 वर्ग सेमी. बड़े बोर्ड की आवश्यकता होगी? हमने कक्षा–6 में क्षेत्रफल के बारे में पढ़ा है। अतः 64 वर्ग सेमी. क्षेत्रफल वाले बोर्ड की भुजा 8 सेमी. है।

शतरंज बोर्ड कितनी जगह घेरेगा इसके लिए हमें क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा और फ्रेम की लम्बाई जानने के लिए परिमाप ज्ञात करना होगा।

स्वयं करके देखिए

नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने के लिए आपको क्षेत्रफल या परिमाप में से किसकी आवश्यकता होगी।

1. श्यामपट्ट कितनी जगह घेरता है?
2. एक आयताकार आम के बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लंबाई क्या है?
3. एक तिकोने पार्क के चारों ओर दो बार चक्कर लगाने पर आप कितनी दूरी तय करेंगे?
4. एक आयताकार स्वीमिंग पूल को ढँकने के लिए आपको कितनी प्लास्टिक शीट की आवश्यकता होगी?

क्या आप जानते हैं,

समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या × एक भुजा की लंबाई

वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

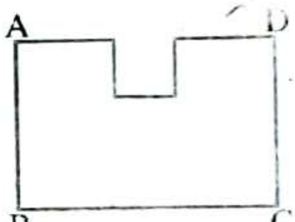
आयत का परिमाप = 2 × (ल. + चौ.)

आयत का क्षेत्रफल = ल. × चौ.

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

आकृति–15.2

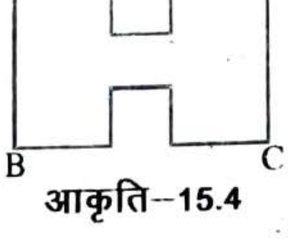
तान्या को एक कोलाज (collage) पूरा करने के लिए एक 4 सेमी. भुजा वाले वर्ग की आवश्यकता थी। उसके पास 28 सेमी. लंबाई तथा 21 सेमी. चौड़ाई वाली एक आयताकर शीट थी (आकृति–15.2)। उसने इस आयताकार शीट में से एक 4 सेमी. भुजा वाले एक वर्ग को काटा। उसकी सहेली ने शीट के शेष भाग को देखा (आकृति 15.3) और तान्या से पूछा, "क्या शीट का परिमाप अब बढ़ गया है या कम हो गया है?"



आकृति–15.3

क्या भुजा की कुल लंबाई, वर्ग काटने के बाद बढ़ गई है?

क्या क्षेत्रफल बढ़ गया है या कम हो गया है?



आकृति–15.4

तान्या सम्मुख भुजा में से एक और वर्ग काटती है (आकृति 15.4)

क्या शीट के शेष भाग का परिमाप पहले से और अधिक हो जाएगा या कम हो जाएगा?

क्या शीट का क्षेत्रफल पहले से और अधिक बढ़ेगा या कम होगा?

अतः यहाँ से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

इससे यह स्पष्ट है कि परिमाप के बढ़ाए जाने पर क्षेत्रफल का बढ़ना आवश्यक नहीं है।

स्वयं करके देखिए

1. वर्गांकित शीटों पर आकृति–15.3 और 15.4 जैसी अलग–अलग आकृतियों को बनाकर उसका परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या परिमाप बढ़ने पर क्षेत्रफल भी बढ़ता है? बताइए।
2. दो ऐसे उदाहरण दीजिए (आकृति बनाकर भी बताएँ) जहाँ परिमाप के बढ़ने पर उसका क्षेत्रफल भी बढ़ जाए।
3. ऐसे दो उदाहरण दीजिए (आकृति बनाकर भी बताएँ) जहाँ परिमाप के बढ़ने पर उसके क्षेत्रफल में भी बढ़ोत्तरी न हो।

उदाहरण–1. एक वर्ग का क्षेत्रफल 121 वर्गमीटर है। तो उस वर्ग का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा = भुजा^{2}

$\therefore$ भुजा = $\sqrt{\text{वर्ग का क्षेत्रफल}}$ अब वर्ग का परिमाप = 4 $\times$ भुजा

$= \sqrt{121 \text{मी}^2}$ = 11 मी. = 4 $\times$ 11 मी. = 44 मी. उत्तर

उदाहरण–2. 10 सेमी. चौड़ाई वाले एक आयताकार लोहे के शीट का क्षेत्रफल 400 वर्ग सेमी. हैं। तो उसकी परिमिति ज्ञात करें।

हल : चौड़ाई =10 सेमी. क्षेत्रफल = 400 वर्ग सेमी.

आयाताकार शीट का क्षेत्रफल =ल.$\times$चौ.

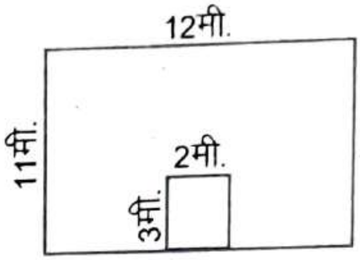
400 सेमी.=ल.$\times$10 सेमी.

$$\text{लं} = \frac{400}{10} = 40 \text{ सेमी.}$$

अब, आयताकार शीट की परिमिति = 2 (लं + चौ.)

= 2 (40 + 10) सेमी. = 2 × 50 सेमी. =100 सेमी.

उदाहरण–3 : 12 मी. × 11 मी. माप एक दीवार में 3 मी. × 2 मी. माप वाले एक दरवाजे का एक चौखट लगाया गया हैं। यदि दीवार पर पेंट कराने का खर्च 2.50 रु. प्रति वर्गमीटर हो तो पूरी दीवार पर पेंट कराने का खर्च ज्ञात करें।



आकृति–15.5

हल : दीवार पर पेंट, दरवाजे के क्षेत्रफल को छोड़कर होगा।

दरवाजे का क्षेत्रफल = ल.×चौ.

= 3 मी.×2 मी. = 6 वर्गमीटर

दरवाजे सहित दीवार का क्षेत्रफल = ल.×चौ.

= 12 मी. × 11मी. = 132 मी.^{2}

दरवाजे को छोड़कर, दीवार का क्षेत्रफल = 132 मी.^{2} – 6 मी.^{2} =126 मी.^{2}

दीवार पर पेंट कराने का कुल खर्च = 126 मी.^{2} × 2.50 $\frac{\text{रु.}}{\text{मी.}^2}$ =315 रु. उत्तर

उदाहरण–4 : एक आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि आयत का क्षेत्रफल 100 वर्ग मीटर हो तो वर्ग की भुजा ज्ञात करें।

हल : वर्ग का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल = 100 वर्ग सेमी.

∵ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा^{2}

100 मी.^{2} = भुजा^{2}

∴ भुजा = $\sqrt{100 \text{ मी.}^2}$ = 10 मी.

उदाहरण–5 : एक तार 20 सेमी. भुजा वाले बर्ग के आकार का है। यदि तार को दुबारा मोड़ कर एक 24 सेमी. लम्बाई वाला एक आयत बनाया जाता है, तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए तथा यह भी बताइए कि किसका क्षेत्रफल अधिक होगा?

हल : वर्ग की एक भुजा = 20 सेमी. तथा क्षेत्रफल = 20×20 =400 वर्ग सेमी.

∴ तार की लम्बाई = वर्ग का परिमाप = 4×भुजा = 4×20 = 80 सेमी.

∵ आयत की लम्बाई = 24 सेमी. , चौड़ाई =? (चूँकि उसी तार को मोड़कर आयत बनाते हैं। अतः इस प्रकार के आयत का परिमाप भी 80 सेमी. ही होगा।)

∵ आयत का परिमाप = 2 (ल. + चौ.)

⇒ 80 सेमी. = 2 (24 सेमी.+ चौ.) ⇒ $\frac{80}{2}$ सेमी. =24 सेमी. + चौ.

⇒ चौ. = 40 सेमी. −24 सेमी. =16 सेमी. ⇒ आयत की चौड़ाई =16 सेमी. है।

पुनः आयताकार तार का क्षेत्रफल = लं.×चौ. =24 सेमी.×16 सेमी. =384 सेमी.^{2}

अतः स्पष्ट है कि तार से बने वर्ग का क्षेत्रफल अधिक होगा।

प्रश्नावली 15.1

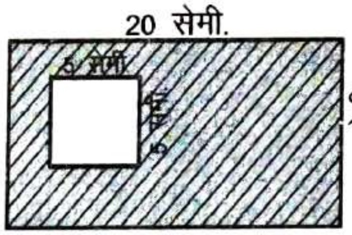
1. एक आयताकार फ्रेम की लम्बाई 15 सेमी. और चौड़ाई 10 सेमी. हैं। तो उसकी परिमिति और क्षेत्रफल ज्ञात करें। यदि फ्रेम को चारों ओर 12 रु. प्रतिमीटर वाली लेस लगानी हैं तो लेस की कीमत बताइए।

2. एक आयताकार चाय के बागान की परिमिति 100 मी. है तथा लम्बाई 30 मी. तो चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

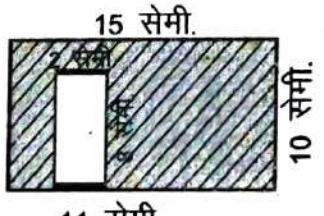
3. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 144 वर्ग मीटर है। तो उस मैदान की परिमिति ज्ञात कीजिए।

4. (i) नीचे दिए गए चित्रों में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(a)



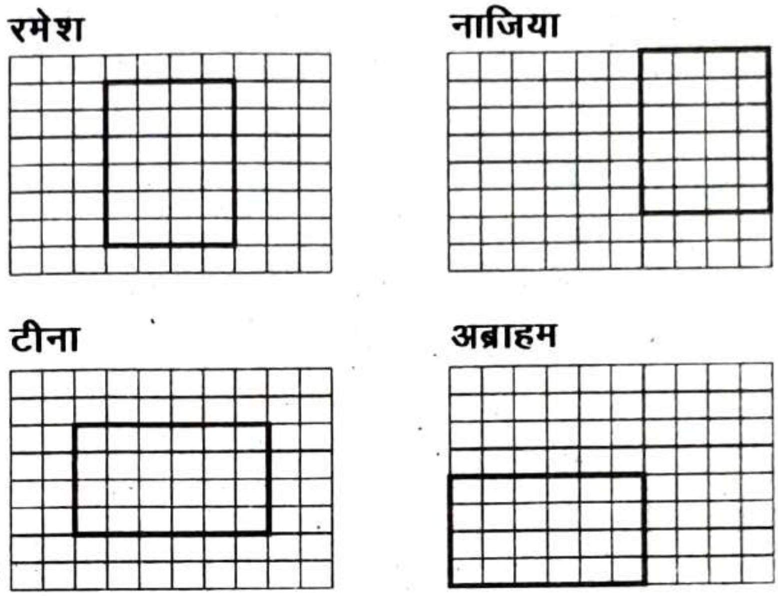
(b)



(c)

(ii) किसी एक चित्र के लिए यह भी बताइए कि छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आपने क्या किया?

5. कक्षा में शिक्षक ने छात्रों को एक गतिविधि करने को दी। छात्रों को 10 सेमी. लम्बे व 8 सेमी. चौड़े गत्ते में से 6 सेमी. लम्बा व 4 सेमी. चौड़ा टुकड़ा काटना था। रमेश, नाज़िया, टीना व अब्राहम ने इसे नीचे दिखाए अनुसार अलग–अलग तरीके से काटा।



(i) चारों छात्रों के बचे हुए भाग के क्षेत्रफल की गणना कीजिए।

रमेश : ______________ नाज़िया : ______________

टीना : ______________ अब्राहम : ______________

आपने क्या पाया?

____

____

6. 20 सेमी. चौड़ाई वाले एक आयताकार शीट का क्षेत्रफल 600 वर्ग सेमी. है। तो उसकी परिमिति ज्ञात करें।

7. 6 मी.$\times$4 मी. माप वाली एक दीवार में 3 मी.$\times$2 मी. माप वाले एक दरवाजे का एक चौखट लगाया जाना है। यदि एक वर्ग मीटर दीवार पर पेंट कराने का खर्च 3.50 रु. हो तो पूरी दीवार पर पेंट कराने का खर्च ज्ञात करें।

8. एक तार आयत के आकार का है। इसकी लम्बाई 50 मी. और चौड़ाई 30 मी. है। यदि उसी तार को दोबारा मोड़कर एक वर्ग बनाया जाता है तो प्रत्येक भुजा की माप क्या होगी? यह भी ज्ञात कीजिए कि किस आकार का क्षेत्रफल अधिक होगा?

9. एक आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि आयत का क्षेत्रफल 3600 वर्ग सेमी. हो तो वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए।

10. एक वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका घेरा उस आयत के घेरे के बराबर है जिसकी लम्बाई 60 मीटर है तथा लम्बाई, उसकी चौड़ाई की तीन गुनी है।

11. चैताली के पास 10×10 से.मी. की एक कार्डशीट है। इस शीट से चित्र बनाने के लिए वह 5×5 सेमी. की शीट काटना चाहती है।

    (i) बताइए, शीट काटने के बाद बची हुई कार्डशीट का क्षेत्रफल कितना होना चाहिए?

    (ii) शीट काटने के बाद उसे लगा कि उसने बड़ा वर्ग काट लिया है क्योंकि उसके पास सिर्फ 64 वर्ग सेमी. शीट ही बची। बताइए, उसने किस भुजा का वर्ग काटा?

आकृति–15.6

12. दिए गए ग्रिड पर 14 से.मी. परिमाप के आप जितना चाहें उतना आयत बनाइए। बस उनकी लम्बाई व चौड़ाई पूर्ण संख्या में हो। उदाहरण के तौर पर एक आयत पहले ही बनाया गया है।

    (i) अब प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल पता कीजिए और उसे दी गई सारणी में लिखिए। उदाहरण में बने हुए आयत का क्षेत्रफल 10 वर्ग सेमी. है।

आयत	लम्बाई	चौड़ाई	परिमाप	क्षेत्रफल
(a)	5 सेमी.	2 सेमी.	14 सेमी.	10 वर्ग सेमी.
(b)				
(c)				
(d)				

(ii) जिस आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है, इसकी दोनों भुजाओं का माप क्या है?

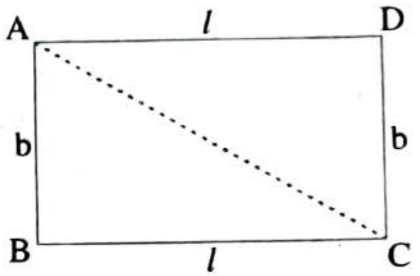
(iii) जिस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है, उसकी दोनों भुजाओं की माप क्या है?

15.3 त्रिभुज का क्षेत्र (Area of Triangle)

एक आयताकार कागज का एक टुकड़ा लेते हैं, उसे विकर्ण के अनुदिश ऐसा काटिए कि दो त्रिभुज प्राप्त हों (आकृति 15.7)

अब एक को दूसरे पर रखिए। क्या ये दोनों △ एक दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं?

हम देखते हैं कि हाँ, दोनों △ एक–दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं। अतः दोनों सर्वांगसम हैं। (आकृति–15.7)



आकृति–15.7

इसलिए प्रत्येक का क्षेत्रफल आपस में बराबर होगा।

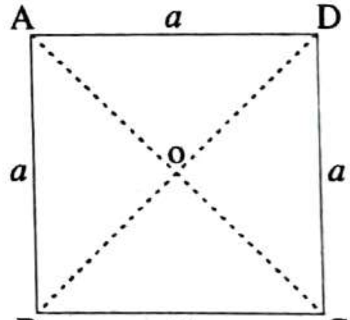
ΔABC का क्षेत्रफल, आयत के क्षेत्रफल का आधा होगा।

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आयत ABCD का क्षे.

$= \frac{1}{2}\ (l \times b)$ (यदि l = आधार, b = ऊँचाई हो)

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

इसी प्रकार कोई वर्ग लेकर उसे त्रिभुजों में बाँटिए तथा प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। a भुजा का ABCD एक वर्गाकार कागज का एक टुकड़ा लें, उसे विकर्ण के अनुदिश मोड़कर काट ले, फिर त्रिभुजों को एक–दूसरे पर रखें। क्या ये त्रिभुज एक–दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं? हम देखते हैं कि सभी त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं। अतः चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। इसलिए सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होगा।



आकृति–15.8

अतः वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = 4 बराबर त्रिभुज का क्षेत्रफल

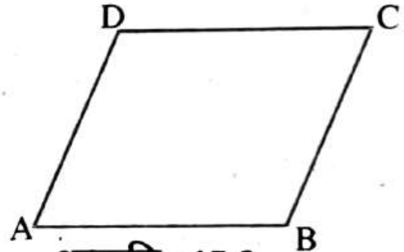
प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}$ × वर्ग का क्षेत्रफल

स्वयं करके देखिए

आयत का क्षे.	लम्बाई	चौड़ाई	त्रिभुज का क्षे. = $\frac{1}{2}$ आयत का क्षे.
24 वर्ग सेमी.	6 सेमी.	$\frac{24}{6} = 4$ सेमी.	$= \frac{1}{2} \times 24 =$ 12 सेमी.
		8 सेमी..	36 वर्ग सेमी.
50 वर्ग सेमी.	10 सेमी.		
		20 सेमी.	15 वर्ग सेमी.

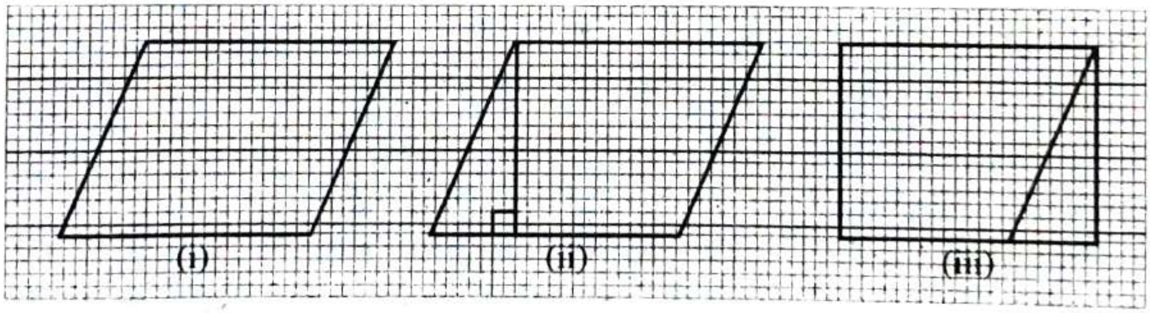
15.4 समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a Parallelogram)

एक किसान चित्र में दी गई आंकृति जैसा समान्तर चतुर्भुजाकार प्लॉट खरीदता है। इसके चारों ओर बाड़ लगाने में कितना तार चाहिए इसकी गणना उसने कर ली। परन्तु कितने वर्ग मीटर क्षेत्रफल यह प्लॉट घेरता है। इसकी गणना वह नहीं कर पाया। आइए ऐसी आकृतियों के क्षेत्रफल की गणना करें।



आकृति—15.9

ग्राफ पेपर पर एक संमातर चतुर्भुज बनाइए जैसा कि आकृति [15.10(i)] में दिखाया गया हैं। इस संमातर चतुर्भुज को काटिए। संमातर चतुर्भुज के एक शीर्ष से इसकी सम्मुख भुजा पर एक लंब खींचिए आकृति [15.10(ii)]। इस त्रिभुज को काट लीजिए और इस त्रिभुज का समांतर चतुर्भज की दुसरी भुजा के साथ रखिए आकृति [15.10(iii)]।



आकृति—15.10

आप कैसी आकृति प्राप्त करते हैं? आप एक आयत प्राप्त करते हैं।

क्या समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बनाए गए आयत के क्षेत्रफल के बराबर है?

हाँ, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल

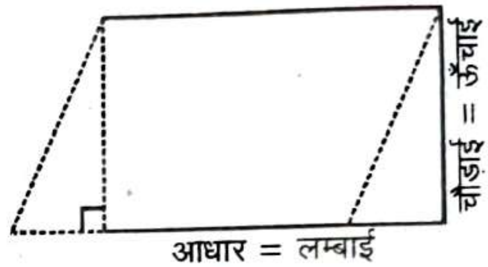
आयत की लंबाई और चौड़ाई क्या है?

हमने देखा कि बनाए गए आयत की लंबाई, समांतर चतुर्भुज के आधार की लंबाई के बराबर है और आयत की चौड़ाई, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई के बराबर है। [आकृति (iii)]।

अब, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लंबाई × चौड़ाई

$= l \times b$

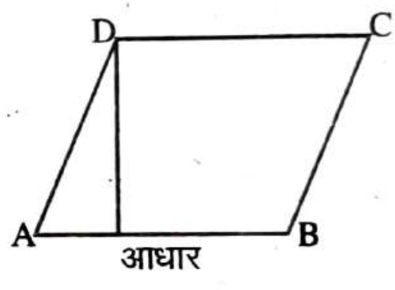


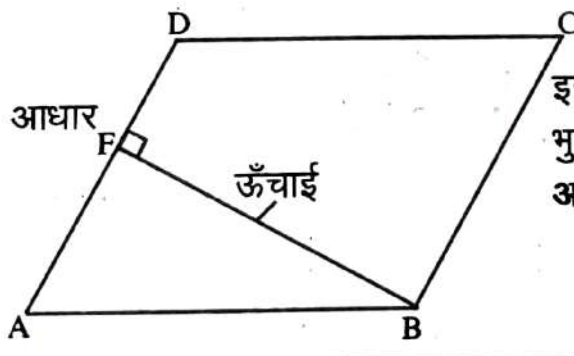
आकृति–15.11

लेकिन आयत की लंबाई l तथा चौड़ाई b क्रमशः समांतर चतुर्भुज का आधार b और ऊँचाई h ही हैं।

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = $b \times h$

समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को आधार ले सकते है। इस भुजा पर, सम्मुख शीर्ष से डाला गया लंब, इसकी ऊँचाई कहलाती है। समांतर चतुर्भुज ABCD में DE, AB पर लंब है। यहाँ AB आधार तथा DE समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।

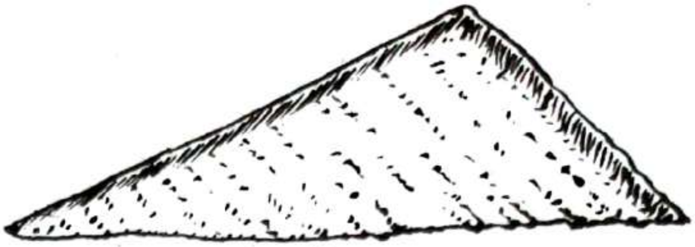




इस समांतर चतुर्भुज ABCD में, BF सम्मुख भुजा AD पर डाला गया लंब है। यहाँ AD **आधार** तथा BF **ऊँचाई** हैं।

15.5 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल

एक माली एक पूरे तिकोने पार्क पर घास लगाने का व्यय जानना चाहता है। इस स्थिति में उसे त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता हैं। आइए एक त्रिभुज के क्षेत्रफल को प्राप्त करने की विधि ज्ञात करें।



आकृति–15.12

कागज़ के एक टुकड़े पर एक विषमबाहु त्रिभुज बनाइए। इस त्रिभुज को काट लीजिए। इस त्रिभुज को दूसरे कागज पर रखिए और समान माप का एक त्रिभुज काटिए। इस प्रकार अब आपके पास समान माप के दो विषमबाहु त्रिभुज हैं। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

एक त्रिभुज को दूसरे पर रखिए जिससे वे एक–दूसरे को पूरी तरह ढँक लें। आप दोनों में से एक त्रिभुज को घुमा भी सकते हैं।

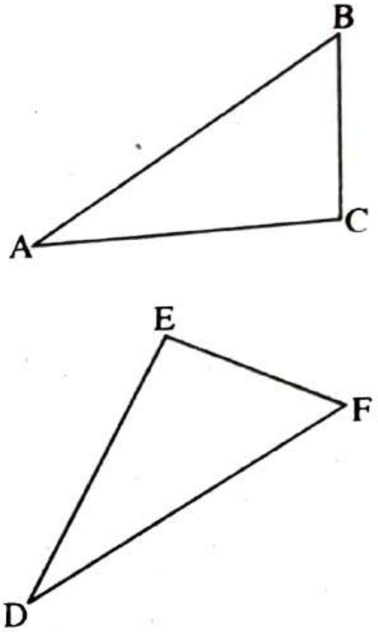
अब दोनों त्रिभुजों को इस प्रकार आपस में रखिए जिससे उनकी संगत भुजाएँ आपस में मिल जाएँ (जैसे आकृति 15.13 में दिखाया गया है)।

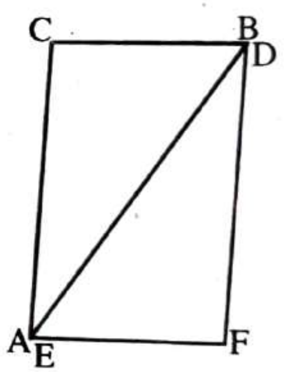
क्या इस प्रकार से बनी आकृति एक समांतर चतुर्भुज है?

प्रत्येक भुजा के क्षेत्रफल की तुलना समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से कीजिए।

त्रिभुजों के आधार तथा ऊँचाई की तुलना समांतर चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई से कीजिए।

आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर हैं। त्रिभुज का आधार तथा ऊँचाई क्रमशः समांतर चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई के बराबर है।





आकृति–15.13

प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

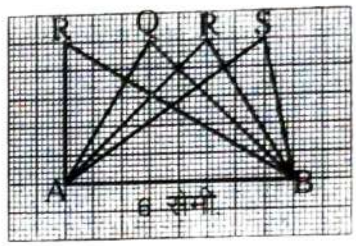
$= \frac{1}{2}$ (आधार $\times$ ऊँचाई) (क्योंकि, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्र=आ. $\times$ ऊँ)

$= \frac{1}{2}$ ($b \times h$) (या $\frac{1}{2}$ b h , संक्षेप में)

स्वयं करके देखिए:

1. ऊपर दिए गए क्रियाकलापों को अलग–अलग प्रकार के त्रिभुज लेकर कीजिए।

2. अलग–अलग प्रकार के समांतर चतुर्भुज लीजिए। प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का दो त्रिभुजों में एक विकर्ण के अनुदिश काटिए। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



आकृति–15.14

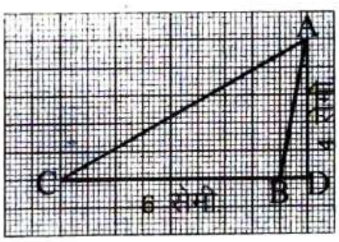
आकृति–15.14 में सभी त्रिभुज, आधार AB = 6 सेमी. पर स्थित हैं।

आधार AB पर प्रत्येक त्रिभुज की संगत ऊँचाई के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

क्या हम कह सकते हैं कि सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हैं? हाँ।

क्या त्रिभुज सर्वांगसम हैं? नहीं।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **सभी सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है लेकिन यह आवश्यक नहीं हैं कि वे त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल बराबर होता है वे सर्वांगसम हैं।**



आकृति–15.15

आधार 6 सेमी. वाले एक अधिक कोण त्रिभुज ABC पर विचार करते हैं (आकृति–15.15)।

इसकी ऊँचाई AD शीर्ष A से CB पर लंब है जो त्रिभुज के बाह्य स्थित है। क्या आप इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

अतः किसी भी त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई होता है।

इन्हें याद रखिए

1. आयत का क्षेत्रफल =ल.×चौ. = $l \times b$

2. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (आधार×ऊँचाई)

3. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार ×ऊँचाई

उदाहरण–6. एक समांतर चतुर्भुज का आधार 8 सेमी. और संगत ऊँचाई 6 सेमी. हैं तो समांतर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आधार = 8 सेमी. ऊँचाई = 6 सेमी.

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार×ऊँचाई

= 8 सेमी. × 6 सेमी.

= 48 वर्ग सेमी.

उदारहण–7. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 108 वर्ग मीटर है तथा उसका आधार 18 मी. है तो संगत ऊँचाई बताइए।

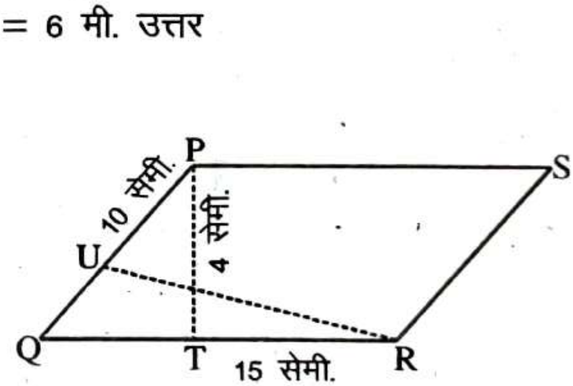
हल : क्षेत्रफल = 108 वर्ग मी. एवं आधार = 18 मी.

∵ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार×ऊँचाई

108मी.^{2} = 18 मी.×ऊँचाई

अतः ऊँचाई = $\frac{108}{18}$ = 6 मी. उत्तर

उदाहण–8. एक समांतर चतुर्भुज PQRS की दो भुजाओं की लम्बाइयां 10 सेमी. और 15 सेमी. है। आधार QR की संगत ऊंचाई 4 सेमी. है तो आधार PQ की संगत ऊंचाई ज्ञात करें। (दी गई आकृति को देखें)



हल : समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = QR × PT

= 15 सेमी. × 4 सेमी. = 60 सेमी.^{2}

पुनः क्षेत्रफल = 60 सेमी.^{2}, आधार = PQ = 15 सेमी., UR = ?

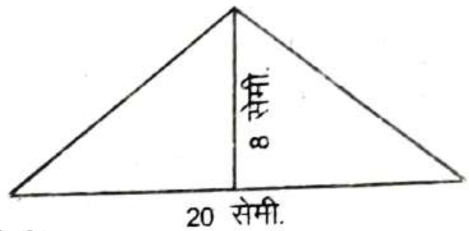
समांतर चतुर्भुज PQRSका क्षेत्रफल = PQ × UR

60 सेमी.^{2} = 10 सेमी. × UR

$$\therefore UR = \frac{60 \text{ सेमी.}^2}{10 \text{ सेमी.}} = 6 \text{ सेमी.}$$

अतः समांतर चतुर्भुज PQRS में PQ की संगत ऊँचाई 6 सेमी.

उदाहरण-9 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 20 सेमी. और ऊंचाई 8 सेमी. है।

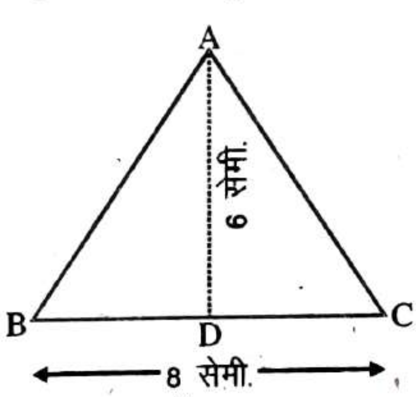


हल त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाई

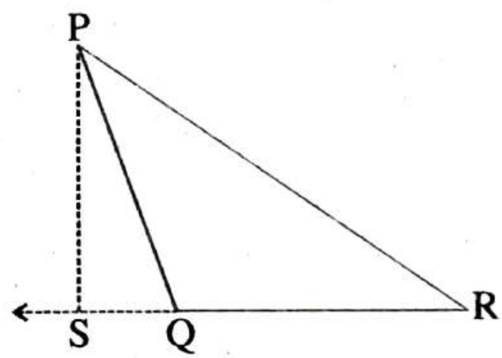
$= \frac{1}{2} \times$ 20 सेमी. × 8 सेमी.

= 80 वर्ग सेमी. या 80 सेमी.^{2}

स्वयं कीजिए : निम्न आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i)



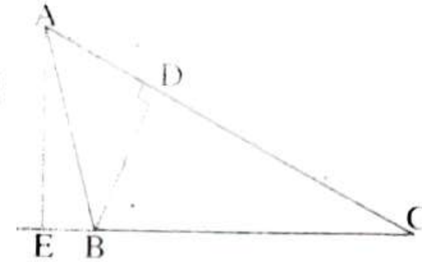
(ii)

उदाहरण-10 किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 48 वर्ग सेमी. है तथा इसके शीर्ष लम्ब की ऊँचाई 8 सेमी. है तो आधार की लम्बाई बताइए।

हल क्षेत्रफल = 48 वर्ग सेमी = 48 सेमी.^{2} एवं ऊँचाई = 8 सेमी.

अतः 48 सेमी.^{2} $= \frac{1}{2} \times$ आधार × 8 अतः आधार $= \frac{48 \times 2 \text{ सेमी.}^2}{8 \text{ सेमी.}} = 12$ सेमी.

उदाहरण–11 त्रिभुज ABC में BC = 16 सेमी.
AE = 8 सेमी. तथा AC = 24 सेमी. तो BD ज्ञात करें।



हल AE = 8 सेमी. BC = 16 सेमी.

$$\text{त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times BC \times AE$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 8 = 64 \text{ सेमी.}^2$$

$$\text{या, त्रिभुज का ABC क्षे.} = \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$64 \text{ सेमी.}^2 = \frac{1}{2} \times 24 \text{सेमी.} \times \text{BD}$$

$$\therefore BD = \frac{64 \times 2}{24} = \frac{16}{3} = 5.33 \text{ सेमी.}$$

प्रश्नावली 15.2

1. एक समांतर चतुर्भुज का आधार 16 सेमी. और संगत ऊँचाई 10 सेमी. है तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 160 वर्ग मीटर है तथा उसका आधार 20 मी. है तो आधार की संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

[illegible] सारणी को भरिए।

समांतर चतुर्भुज	आधार	ऊंचाई	क्षेत्रफल
(i)	200 मी.	150 मी.	
(ii)	80 सेमी.	70 सेमी.	
(iii)	60 सेमी.		4800 वर्ग सेमी.
(iv)		90 सेमी.	3600 वर्ग सेमी.

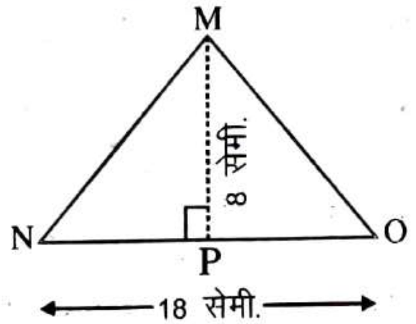
4. समांतर चतुर्भुज PQRS की दो भुजाओं की लम्बाइयाँ 20 सेमी. और 10 सेमी. है आधार PQ की संगत ऊँचाई 6 सेमी. है। तो QR की संगत ऊँचाई ज्ञात करें।

5. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसका आधार 16 सेमी. और ऊँचाई 12 सेमी. है।

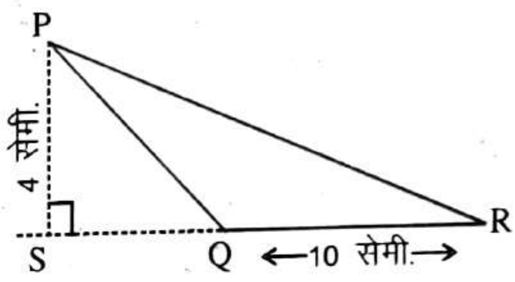
6. रिक्त स्थानों को भरें।

त्रिभुज	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल
(i)	50 सेमी.	30 सेमी.	
(ii)	40 मी.	60 मी.	
(iii)	80 मी.		1200 वर्ग मीटर
(iv)		20 मी.	300 वर्ग मीटर

7. **निम्न आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**



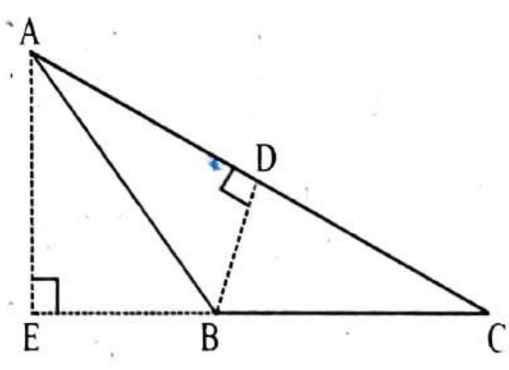
(i)



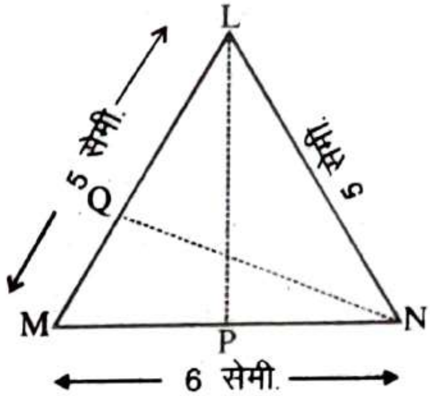
(ii)

8. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 45 वर्ग सेमी. है तथा आधार से शीर्षलम्ब की ऊँचाई 9 सेमी. है तो आधार की लम्बाई बताइए।

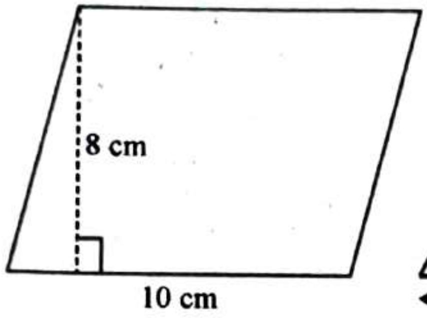
9. त्रिभुज ABC में BC= 20 cm AE=14 सेमी. तथा AC=28 सेमी. तो BD ज्ञात करें।



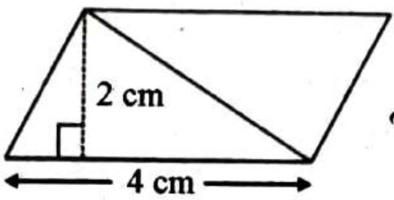
10. त्रिभुज LMN एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें LM=LN= 5 सेमी. और MN = 6 सेमी. है (बगल की आकृति को देखें)। LP= 4 सेमी. त्रिभुज LMN का क्षेत्रफल ज्ञात करें तथा N से LM तक की ऊँचाई त्रिभुज NQ ज्ञात करें।



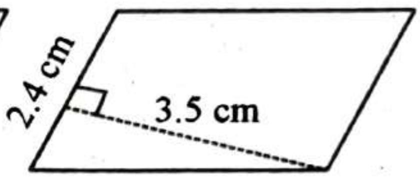
[illegible] चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i)

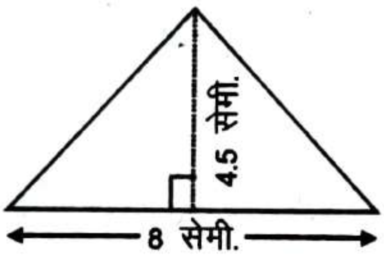


(ii)

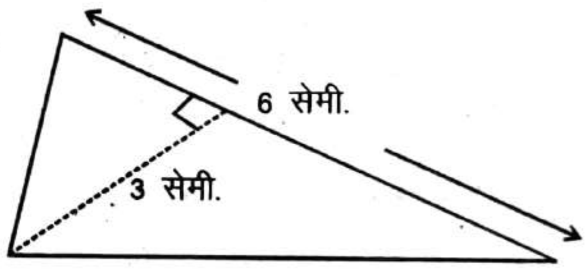


(iii)

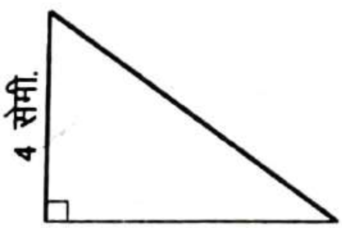
12. नीचे दिए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



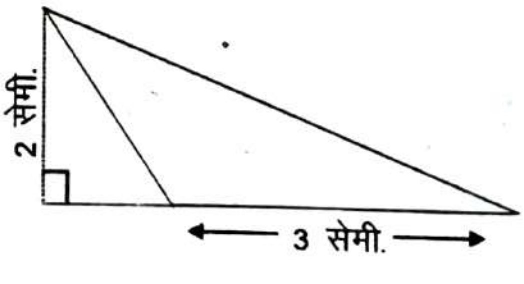
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

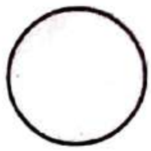
15.6 वृत्त (Circle)

निशा अपनी चूड़ी पर चमकीली पन्नी लगाना चाहती है। उसे पता करना है कि पन्नी की लम्बाई क्या है? क्या आप बता सकते हैं कि चूड़ी की परिमिति क्या होगी?

आप एक पैमाने (रूलर) की सहायता से वक्र सतह को नहीं माप सकते क्योंकि ये आकृति सीधी नहीं हैं। आप क्या करेंगे?

आकृति–15.16

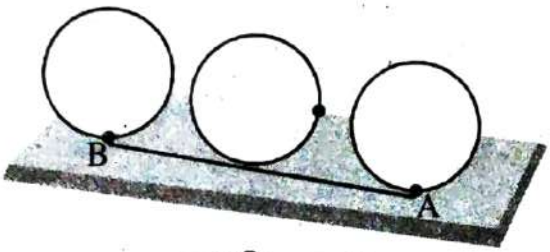
आकृति 15.16 में दिए गए आकार की आवश्यक किनारे की लंबाई ज्ञात करने के लिए कार्ड के किनारे पर एक बिन्दु अंकित कीजिए और इसे एक टेबुल पर रखिए। बिन्दु की स्थिति को टेबुल पर भी अंकित कीजिए। (आकृति–15.17)।



आकृति–15.17

आकृति–15.18

अब वृत्ताकार कार्ड को एक सरल रेखा की दिशा में टेबुल पर तब तक घुमाइए जब तक अंकित बिन्दु टेबुल को दुबारा स्पर्श न कर जाए। इस दूरी को रेखा के अनुदिश में मापिए। यह आवश्यक किनारे की लंबाई है। यह कार्ड के अंकित किए गए बिन्दु से कार्ड के किनारे–किनारे वापस उसी बिन्दु की दूरी है।



आकृति–15.19

आप एक धागे को वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर किनारे–किनारे रखकर भी दूरी ज्ञात कर सकते हैं।

एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी उसकी परिधि कहलाती है।

स्वयं करके देखिए

एक बोतल का ढक्कन, एक चूड़ी या कोई अन्य वृत्ताकार वस्तु लीजिए और इसकी परिधि ज्ञात कीजिए https://www.evidyarthi.in/

अब, क्या आप इस विधि से एक धावक द्वारा एक वृताकार पथ पर तय की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?

अभी भी, पथ के चारों ओर की दूरी ज्ञात करना या अन्य किसी वृत्ताकार वस्तु के धागे से मापना बहुत ही मुश्किल होगा। तथापि यह माप सही नहीं होगी।

अतः इसके लिए हमें एक सूत्र की आवश्यकता है जैसा कि तल की आकृति या आकारों के लिए हम प्रयोग करते हैं।

आइए देखें क्या वृत्तों के व्यास और परिधि के बीच में कोई संबंध है?

निम्न तालिका पर विचार कीजिए। अलग–अलग त्रिज्याओं के 6 वृत्त खींचिए और धागे की सहायता से उनकी परिधि ज्ञात कीजिए। परिधि और व्यास के अनुपात को भी ज्ञात कीजिए।

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि और व्यास का अनुपात
1.	3.5 सेमी.	7.0 सेमी.	22.0 सेमी.	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 सेमी.	14.0 सेमी.	44.0 सेमी.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 सेमी.	21.0 सेमी.	66.0 सेमी.	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 सेमी.	42.0 सेमी.	132.0 सेमी.	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 सेमी.	10.0 सेमी.	32.0 सेमी.	$\frac{31.5}{10} = 3.15$
6.	15.0 सेमी.	30.0 सेमी.	94.0 सेमी.	×

ऊपर दी गई तालिका से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या यह अनुपात लगभग समान है? हाँ क्या आप कह सकते हैं कि एक वृत्त की परिधि हमेशा इसके व्यास की लगभग तीन गुना है? हाँ।

यह अनुपात स्थिर है और इसे 'π' (पाई) से प्रदर्शित करते हैं। इसका मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 है।

अतः स्पष्ट है– $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$ अतः परिधि = $\pi \times$ व्यास

$C = \pi d$ यदि परिधि = C, व्यास = d

या $C = \pi \times 2r$ (चूँकि $d = 2r$, जहाँ r = त्रिज्या है)

या $C = 2\pi r$ अर्थात् वृत्त की परिधि = $2\pi r$

मुख्य सूत्र से निकाले गये सूत्र

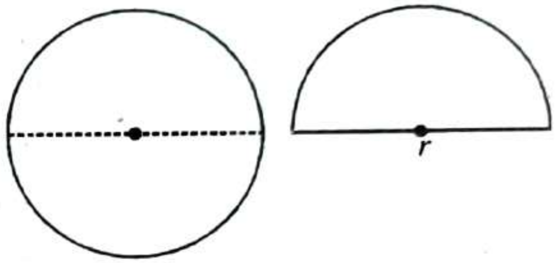
(i) $C = \pi d$ (ii) $d = \frac{C}{\pi}$ (iii) $d = 2r$

(iv) $\therefore r = \frac{d}{2}$ (v) $C = 2\pi r$ (vi) $\therefore r = \frac{C}{2\pi}$

स्वयं करके देखिए

विभिन्न आकार की चूड़ी, एक वृत्ताकार प्लेट, बोतल का ढक्कन और 1 रुपया का सिक्का लें और उसके परिधि और व्यास को मापें, फिर उनका संगत अनुपात निकालें।

आइए वृत्त को दो बराबर भाग में बाँटकर देखें तो प्रत्येक भाग एक अर्धवृत्त कहलाता है। जैसे–



आकृति–15.20

अर्धवृत्त की परिमिति $= \frac{2\pi r}{2} + 2r$

चित्र से स्पष्ट है।

अथवा अर्धवृत्त की परिमिति $= \frac{\pi d}{2} + d$

स्वयं करके देखिए

क्र.सं.	त्रिज्या	व्यास	$\pi = \frac{22}{7}$ परिधि
1.	4 सेमी.		
2.		16 मी.	
3.	21 सेमी.		
4.			308 सेमी.
5.		84 सेमी.	

8 सेमी. व्यास वाले एक वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए। $(\pi = 3.14)$

यहाँ वृत्त का व्यास (d) = 8 सेमी.

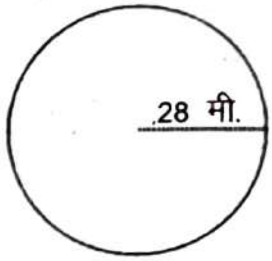
∵ वृत्त की परिधि = πd

= 3.14 × 8 = 25.12 अतः अभीष्ट उत्तर = 25.12 सेमी.

28 मीटर की त्रिज्या वाले वृत्ताकार मैदान के बाहर 3520 मीटर लम्बी दौड़ पूरी करने के लिए कितने चक्कर लगाने की जरूरत पड़ेगी?

वृत्ताकार मैदान की परिधि

$= 2\pi r = 2\times\frac{22}{7}\times 28$ मी. = 176 मीटर



∵ 176 मी. दौड़ के लिए 1 चक्कर लगाना पड़ता है।

∴ 1 मी. दौड़ के लिए $\frac{1}{176}$ चक्कर लगाना पड़ता है।

∴ 3520 मी. दौड़ के लिए $\frac{1}{176}\times 5320 = 20$ चक्कर

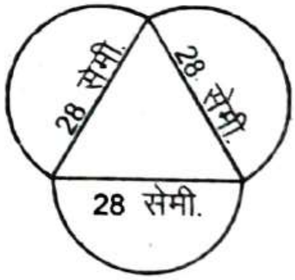
अतः 3520 मीटर दौड़ पूरी करने के लिए 20 चक्कर लगाने पड़ेंगे।

दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए। $\pi = \frac{22}{7}$

इस आकृति की परिमिति ज्ञात करने के लिए हमें प्रत्येक अर्धवृत्त की परिधि को ज्ञात करने की आवश्यकता है। क्या आपको त्रिभुज के परिमाप को भी ज्ञात करने की आवश्यकता है? नहीं। इस आकृति की बाहरी परिसीमा अर्धवृत्तों से मिलकर बनी है। प्रत्येक अर्धवृत्त का व्यास 28 सेमी है।

हम जानते हैं कि, वृत्त की परिधि $= \pi d$

अर्द्धवृत्त की परिधि $= \frac{\pi d}{2}$



$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 28$ = 44 सेमी.

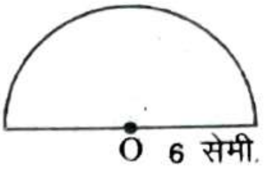
अतः दी गई आकृति की परिमिति = 3 × 44 = 132 सेमी.

उदाहरण 15. 6 सेमी. त्रिज्या वाले अर्धवृत्त की परिमिति ज्ञात करें।

हल ∵ अर्धवृत्त की परिमिति $= \frac{2\pi r}{2} + 2r$

$= \frac{2\times22\times6}{2\times7} + 2\times6$ $= \frac{132}{7} + 12$

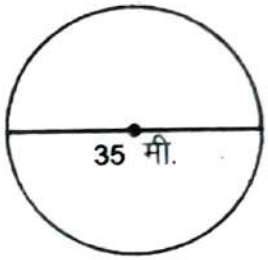
= 18.857 + 12 = 30.857 सेमी. = 30.86 सेमी.



उदाहरण 16. एक माली अपने 35 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार बगीचे को घेरना चाहता है। वह रस्सी से दो घेरा लगाना चाहता है, इसके लिए वह कितने लम्बी रस्सी खरीदेगा। यदि रस्सी 5 रु. प्रति मीटर की दर से बिकती हो तो खरीदे गये कुल रस्सी की कीमत ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ, बगीचें का व्यास = 35 मी.

चूँकि परिधि $= \frac{22}{7}\times35 = 110$ मी.



∴ 1 घेरा में रस्सी की लम्बाई =110 मीटर

2 घेरा में रस्सी की लम्बाई =110×2=220 मीटर

1 मीटर रस्सी की कीमत 5 रुपये है।

220 मीटर रस्सी की कीमत $= 220\times5 = 1100$ रुपये

प्रश्नवाली 15.3

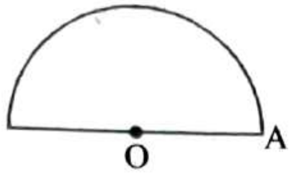
1. निम्नलिखित त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए।(π का मान $\frac{22}{7}$ लीजिए)

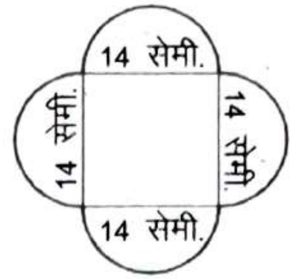
(i) 56 मिमी. (ii) 7 सेमी. (iii) 21 सेमी. (iii) 28 मिमी.

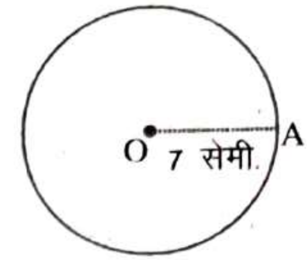
2. निम्नलिखित परिधि वाले वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें।

(i) 154 मी. (ii) 308 सेमी. (iii) 352 सेमी. (iii) 220 मी.

3. निम्नलिखित आकृतियों की परिमिति ज्ञात कीजिए।







4. निम्नलिखित व्यास वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए।

(i) 14 सेमी. (ii) 28 सेमी. (iii) 56 मिमी. (iii) 42 सेमी.

5. एक वृत्ताकार एल्युमीनियम शीट की परिधि 220 मीटर है तो शीट की त्रिज्या तथा व्यास ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

6. एक वृत्ताकार घड़ी की मिनट की सुई की लम्बाई 6 सेमी है। मिनट की सुई की नोक 1 घंटे में कितनी दूरी तय करती है। $(\pi = 3.14)$

7. 14 मीटर त्रिज्या वाले एक पहिए को 264 मीटर दूरी तय करने के लिए कितनी बार घुमाना पड़ेगा? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

8. 21 सेमी. की त्रिज्या में एक तार की लम्बाई को वृत्ताकार रूप में मोड़ा जाता है तो तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

9. 28 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार बगीचे के चारों ओर माली बाड़ लगाना चाहता है। खरीदे जाने वाले आवश्यक रस्से की लम्बाई ज्ञात कीजिए, यदि वह 3 पूरे चक्कर की बाड़ लगाना चाहता है। 5 रुपये प्रति मीटर की दर से रस्से पर व्यय ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

10. 14 सेमी. और 21 सेमी. त्रिज्या वाले दो वृत्तों की परिधि का अनुपात बताइए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

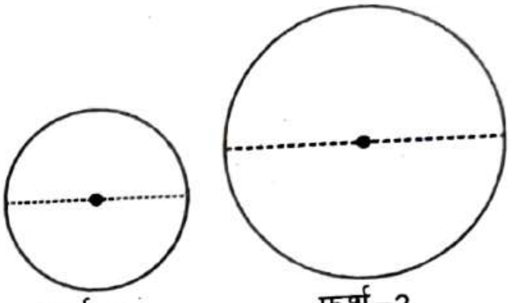
11. एक तार वर्गाकार आकृति में है, जिसकी भुजा 22 सेमी. है, उसे मोड़कर एक वृत्त बनाया जाता है तो उस वृत्त की त्रिज्या तथा परिधि बताइए।

12. राहुल के पास एक वृत्ताकार आकार की तार है, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी. है, उसके 11 सेमी. भुजा वाले वर्ग बनाए जा सकते हैं। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

13. 21 मीटर की त्रिज्या वाले वृत्ताकार मैदान के बाहर के 1980 मीटर की लम्बी दौड़ पूरी करने के लिए कितने चक्कर लगाने की जरूरत पड़ेगी।

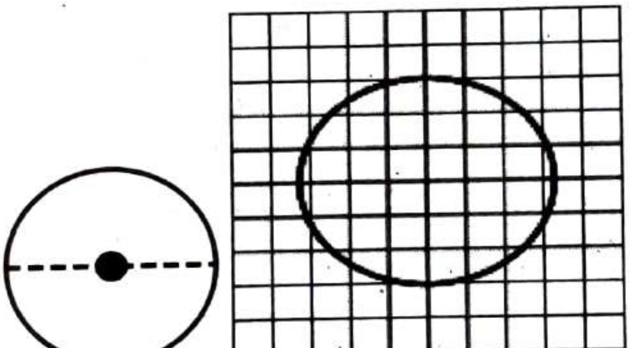
15.7 वृत का क्षेत्रफल (Area of Circle)

दो कमरे की फर्श की आकृति गोलाकार है। एक कमरे के फर्श का व्यास 14 मीटर हैं तथा दूसरे कमरे के फर्श का व्यास 21 मीटर है। फर्श में दरी बिछानी है जैसा कि चित्र 15.21 में दिखाया गया है।



आकृति–15.21

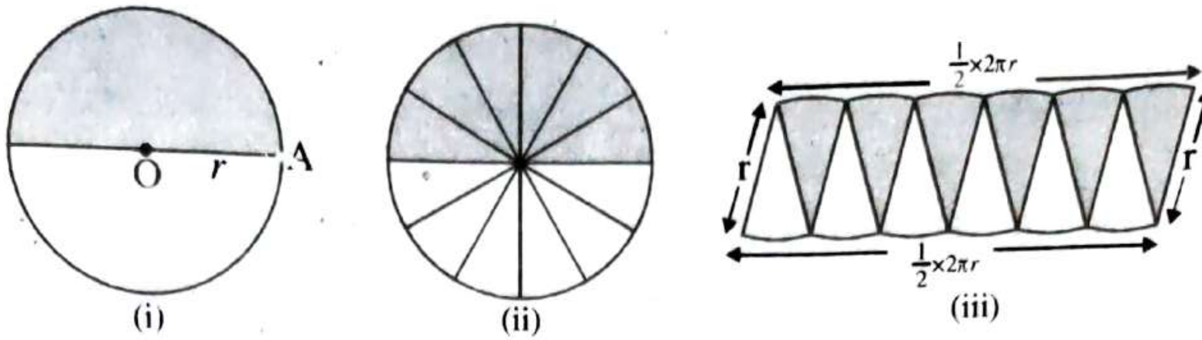
तो बताइए कि किस फर्श में बड़ी दरी की जरूरत होगी। स्पष्ट है दूसरे फर्श में अधिक बड़ी दरी लगेगी क्योंकि फर्श–2 अधिक जगह छेक रहा है या उसका क्षेत्रफल अधिक है। तो आइए अब वृत्त के क्षेत्रफल पर चर्चा करें।



आकृति–15.22

आकृति–15.22 पर पारदर्शी ग्राफ पेपर निम्न चित्रानुसार रखें। अब इस आकृति के अन्दर के वर्गों को गिनकर इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। इस विधि से वर्ग का क्षेत्रफल का एक अनुमानित क्षेत्रफल ही प्राप्त होता है क्योंकि वृत्त के किनारे सीधे नहीं हैं। अतः सही क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक और विधि पर विचार करते हैं–

एक कागज का वृत्ताकार चकती लेते हैं, उस चकती को दो बराबर भागों में मोड़ते हैं, आधे भाग को रँग देते हैं, पुनः इसे 12 खंडों में चित्रानुसार काट लेते हैं। अब प्रत्येक त्रिज्यखण्ड को उपर्युक्त चित्र के तीसरे क्रम के अनुसार व्यवस्थित कर लेते हैं। जो स्थूल रूप से एक समान्तर चतुर्भुज को दर्शाता है।



आकृति–15.23

यदि हम वृत्त को और अधिक त्रिज्यखण्डों में विभाजित करें और उन्हें उपर्युक्त चित्रानुसार व्यवस्थित करें तो लगभग एक आयत प्राप्त होगा और आयत की चौड़ाई वृत्त की त्रिज्या होगी तथा लंबाई, वृत्त की परिधि की आधी (यानी πr) होगी क्योंकि वृत्त की परिधि, आयत के रूप में व्यवस्थित करने पर दो बराबर भागों मे बँट जाती हैं, जैसा कि ऊपर के चित्र से स्पष्ट है।

अतः वृत्त का क्षेत्रफल = उपर्युक्त आयत का क्षेत्रफल

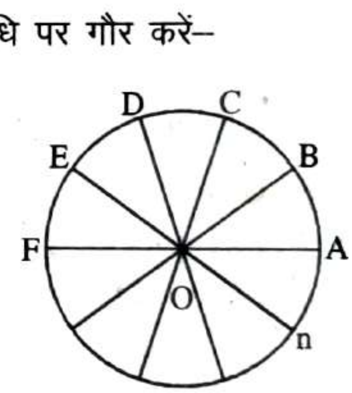
= लम्बाई × चौड़ाई

$$= \frac{1}{2}\times 2\pi r\times r = \pi r^2$$

इस प्रकार **वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2 प्राप्त हुआ**

आइए वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक और विधि पर गौर करें–

मान लिया कि "O" केन्द्र का एक वृत्त है, जिसके n बराबर त्रिज्यखंडों AOB, BOC, COD, DOE, EOF, ...n में बाँटे। यदि n का मान अधिक हो तो प्रत्येक त्रिज्यखंड एक समकोण त्रिभुज होगी, इस प्रकार हमें n समकोण त्रिभुज प्राप्त होंगे तथा वृत्त की परिधि भी n बराबर खंडों में विभक्त हो जाएगी।



आकृति–15.24

$\because$ परिधि का n खण्ड = $2\pi r$

$\therefore$ परिधि का 1 खण्ड = $\frac{2\pi r}{n} = AB$

(क्योंकि परिधि का प्रत्येक चाप खण्ड बराबर है।)

वृत्त का क्षेत्रफल = n × समकोण त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$= n \times \frac{1}{2} \times OA \times AB$

$= n \times \frac{1}{2} \times r \times \frac{2\pi r}{n} \quad \left(\because OA = r, AB = \frac{2\pi r}{n} \right)$

$= \pi r^2$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

पुनः वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ $r = \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$

स्वंय करके देखिए

1. विभिन्न त्रिज्या का वृत्त बनाएँ और ग्राफ पेपर की सहायता से वर्गों की संख्या को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा वृत्त के सूत्र से क्षेत्रफल ज्ञात कर दोनों उत्तरों की तुलना कीजिए।
2. कागज की एक वृत्ताकार चकती लें बराबर त्रिज्यखंडों में मोड़कर काटें फिर उस त्रिज्यखंड को एक आयत के रूप में व्यवस्थित कर वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

उदाहरण–17. 7 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

हल : त्रिज्या r = 7 सेमी., वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154$ वर्गसेमी या cm^2

उदाहरण–18. 20 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।(जबकि $\pi = 3.14$)

हल त्रिज्या r = 20 सेमी.

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 3.14 \times (20)^2$

$= 3.14 \times 400$

$=$ 1256.00 वर्ग सेमी.

उदाहरण–19. एक वृत्ताकार मैदान का व्यास 14 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : व्यास d = 14 मीटर

$r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7$ मीटर

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$= \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ = 154 वर्गमीटर या मी.^{2}

उदाहरण–20. एक वृत्त की परिधि 62.8 सेमी. है तो इस वृत्त की त्रिज्या तथा क्षेत्रफल ज्ञात करें। $(\pi = 3.14)$

हल : वृत्त की परिधि = $2\pi r$

68.8 सेमी. = 2 × 3.14 × r

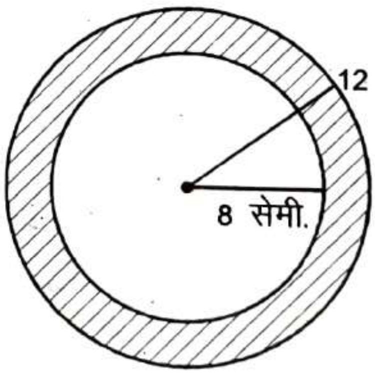
या, $\frac{62.8}{2 \times 3.14}$ सेमी. = r या, $\frac{6280}{2 \times 314}$ सेमी. = r

या, $\frac{20}{2}$ सेमी. = r या, $r = 10$ सेमी.

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$= 3.14 \times (10)^2$ = 3.14 × 100 = 314 वर्ग सेमी. या सेमी^{2}

उदाहरण–21. बगल की आकृति में दिए गए दो संकेन्द्रीय वृत्त की त्रिज्याएँ क्रमशः 12 सेमी और 8 सेमी हैं तो छायांकित भाग क्षेत्रफल ज्ञात करें।



हल : बड़े वृत्त की त्रिज्या = 12 सेमी

बड़े वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$= 3.14 \times (12)^2$ $= 3.14 \times 12 \times 12$

$= 452.16$ वर्ग सेमी. या सेमी.^{2}

छोटे वृत्त की त्रिज्या = 8 सेमी.

छोटे वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$= 3.14 \times 8^2 \qquad = 3.14 \times 8 \times 8$

$= 200.96$ वर्ग सेमी.

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 452.16 − 200.96

= 251.20 वर्ग सेमी.

प्रश्नावली–15.4

1. **वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी त्रिज्या निम्नलिखित हैं– (π का मान $\frac{22}{7}$ लीजिए)**
   (i) 14 सेमी. (ii) 20 सेमी. (iii) 2.8 सेमी.
   (iv) 35 सेमी.

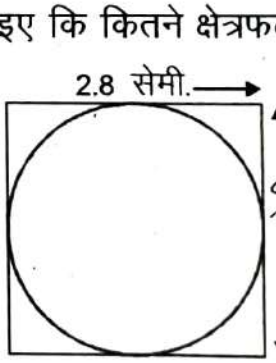
2. **वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी परिधि निम्नलिखित है–**
   (i) 572 सेमी. (ii) 253 सेमी. (iii) 110 सेमी.
   (iv) 132 मीटर (v) 198 सेमी.

3. यदि एक वृत्ताकार मैदान की परिधि 154 सेमी. हो तो इस मैदान की त्रिज्या ज्ञात करें। मैदान का क्षेत्रफल भी ज्ञात करें। (π का मान $\frac{22}{7}$ लीजिए)

4. एक गाय 28 मी. वर्गाकार मैदान के केन्द्र (मध्य) में एक 14 मी. रस्सी से बँधी है तो बताइए गाय कितने क्षेत्रफल तक की घास चरेगी और यह भी बताइए कि कितने क्षेत्रफल की घास नहीं चरेगी।

5. एक गोल छल्ले की बाहरी गोलाई की त्रिज्या 14 मी. है तथा छल्ले की भीतरी त्रिज्या 7 मी. है तो छल्ले का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. दी गई आकृति–15.25 में वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति–15.25

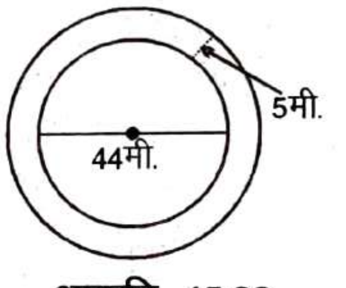
7. 88 मीटर लम्बे एक तार को मोड़कर वृत्ताकार रूप में जमीन पर रखा गया तो कितने क्षेत्र को तार घेर लेगा?

8. एक वृत्त की परिधि 30 मीटर लम्बे और 14 मीटर चौड़े एक आयत के परिधि के बराबर है तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

9. 8 सेमी. त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार कागज के टुकड़े में से 4 सेमी. त्रिज्या वाली एक वृत्त को काटकर निकाल दिया जाता है तो कागज के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $(\pi = 3.14)$

10. 20 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से 2.8 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार जमीन के ईंट सोलिंग कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

11. किसी आयत की चौड़ाई 44 मीटर है और इसकी लम्बाई, चौड़ाई की 2½ गुनी है। उस वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि आयत की परिमिति के बराबर है। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



आकृति–15.26

12. एक वृत्ताकार फूलों की क्यारी के चारों ओर 5 मीटर चौड़ा पथ है तथा फूलों की क्यारी का व्यास 44 मीटर है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $(\pi = 3.14)$

13. एक वृत्ताकार बगीचे का क्षेत्रफल 2464 मी.^{2} है। बगीचे के केन्द्र में एक घूमने वाला फव्वारा लगाया जाता है, जो इस बगीचे के चारों ओर पूरी–पूरी सिंचाई करता है तो अपने चारों ओर फव्वारा कितने त्रिज्या में पानी का छिड़काव करता है। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

14. दो वृत्तों के त्रिज्याओं का अनुपात 3:4 है, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

15.8 इकाइयों का रूपान्तरण

एक सेंटीमीटर लम्बाई और 1 सेमी. चौड़ाई का एक वर्ग बनाएँ, इस वर्ग के ऊपर 1 मिमी. वाला पारदर्शी ग्राफ पेपर को रखें, तो हम देखते हैं कि 1 सेमी. वाले वर्ग के अन्दर ग्राफ के 100 वर्ग आते हैं। अतः 1 सेमी.^{2} = 100 मिमी.^{2}।

हम लम्बाई की इकाइयों को जानते हैं–

10 मिलीमीटर = 1 सेमी. और 10 सेंटीमीटर = 1 डेसीमीटर

इसी प्रकार 10 मीटर = 1 डेकामीटर 10 डेकामीटर = 1 हेक्टोमीटर

10 हेक्टोमीटर = 1 किलोमीटर

चूँकि 10 मिमी. = 1 सेमी. अतः, $(10 \text{ मिमी.})^2 = (1 \text{ सेमी.})^2$ और, 100 मिमी.^{2} = 1 सेमी.^{2}

इसी प्रकार 100 सेमी. = 1 मी. या $(100 \text{ सेमी.})^2 = (1 \text{ मी.})^2$ या 10000 सेमी.^{2} = 1 मी.^{2}

क्या आप इसी प्रकार किमी.^{2} को मी.^{2} में बदल सकते हैं?

इन्हें क्षेत्रफल की इकाइयों में निम्न प्रकार से जाना जाता है।

100 वर्ग मिलीमीटर = 1 वर्ग सेंटीमीटर

100 वर्ग सेंटीमीटर = 1 वर्ग डेसीमीटर

100 वर्ग डेसीमीटर = 1 वर्ग मीटर = 1000 वर्ग सेंटीमीटर

100 वर्ग मीटर = 1 वर्ग डेकामीटर

100 वर्ग डेकामीटर = 1 वर्ग हेक्टोमीटर

100 वर्ग हेक्टोमीटर = 1 वर्ग किलोमीटर

मिट्रिक प्रणाली में भूखण्ड के क्षेत्रफल को हेक्टेयर में मापा जाता है।

अतः हेक्टेयर = 100 × 100 मी.^{2} = 10,000 मी.^{2}

जब हम क्षेत्रफल की एक इकाई को छोटी इकाई में बदलते हैं तो परिणामस्वरूप इकाइयों में अंकों की संख्या अधिक होगी। https://www.evidyarthi.in/

उदाहरणस्वरूप 1000 सेमी.^{2} = 1000×1 सेमी.^{2} = 1000×100 मिमी.^{2} = 100000 मिमी.^{2}

परन्तु जब हम क्षेत्रफल की एक इकाई को बड़ी इकाई में बदलते हैं तो बड़ी इकाई में अंकों की संख्या कम होगी।

जैसे– 1000 सेमी.^{2} = $\frac{1000}{10000}$ मी. = $\frac{1}{10}$ मी. = 0.1 मी.

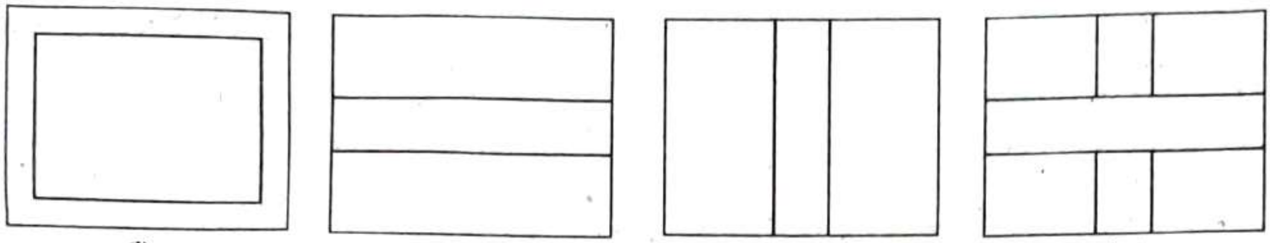
स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित को रूपान्तरित करें।

(i) 200 सेमी.^{2} को मिमी.^{2} में। (ii) 4 हेक्टेयर को मी.^{2} में। (iii) 400 मी.^{2} को सेमी.^{2} में।

15.9 उपयोग

हम लोगों ने देखा है कि बहुधा पार्कों या बगीचों में उनके चारों ओर या बीच में चौपड़ की तरह कुछ स्थान पथ के रूप में निम्न चित्रों जैसा छोड़ दिया जाता है अथवा एक फ्रेम किए हुए चित्र या पेंटिंग के चारों ओर कुछ स्थान छोड़ दिया जाता है। जैसे–



(i) (ii) (iii) (iv)

आकृति–15.27

हमें ऐसे पथों या बार्डरों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की आवश्यकता होती है, जब हम उनके बनाने का व्यय जानना चाहते हैं।

उदाहरण–22. एक आयताकार बगीचा 50 मीटर लम्बा और 40 मीटर चौड़ा है। बगीचे के अन्दर से चारों तरफ 2 मीटर चौड़ा एक रास्ता बनाया गया है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि ABCD एक आयताकार बगीचा है। छायांकित भाग 2 मीटर चौड़ा रास्ता को दर्शाता है।

आयत ABCD का क्षेत्रफल $= 50$ मी. $\times 40$ मी.

$= 2000$ मी.^{2}

पुनः PQRS का क्षेत्रफल के लिए लम्बाई $PQ = (50 - 2 \times 2)$ मी. $= 46$ मी.

$PS = (40 - 2 \times 2)$ मी. $= 36$ मी.

PQRS का क्षेत्रफल $PQ \times PS = 46 \times 36$ मी.$^2 = 1656$ मी.^{2}

रास्ते का क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल – आयत PQRS का क्षेत्रफल

$= 2000$ मी.$^2 - 1656$ मी.$^2 = 344$ मी.^{2}

उदाहरण–23. 50 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के बाहर की ओर से एक 4 मीटर चौड़ा पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात करें तथा 20 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से इसे सीमेंट कराने का व्यय ज्ञात करें।

हल : माना कि ABCD एक वर्ग मीटर भुजा का वर्गाकार पार्क है। छायांकित भाग 4 मीटर चौड़े पथ को दर्शाता है।

EF = AB + 2 × पथ की चौड़ाई

= 50 मी. + 2 × 4 मी. = 58 मी.

वर्ग EFGH का क्षेत्र. = भुजा × भुजा

= 58 मी. × 58 मी.

= 3364 मी.^{2}

वर्गाकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 50 मी. × 50 मी.

= 2500 मी.^{2}

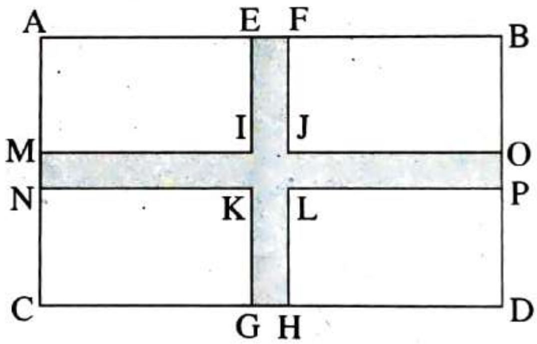
$\because$ पथ का क्षेत्रफल = EFGH का क्षेत्रफल − ABCD का क्षेत्रफल

= 3364 मी.^{2} - 2500 मी.^{2} = 864 मी.^{2}

$\therefore$ 1 मी.^{2} सीमेंट कराने का व्यय = 20 रु.

$\therefore$ 864 मी.^{2} सीमेंट कराने का व्यय = 20 × 864 = 17280 रु.

उदाहरण–24. 100 मीटर लम्बाई और 50 मीटर चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर 5 मीटर चौड़ाई के दो पथ एक–दूसरे पर लम्बवत् ऐसे बने हुए हैं जो भुजाओं के समांतर हैं। पथों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा 200 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से पथों को बनाने का व्यय ज्ञात करें।



हल : छायांकित भाग पथ को दर्शाता है। परंतु वर्ग IJLK के क्षेत्रफल को दो बार लिया जाता है, जिसे घटाना होगा।

आयत EFGH में EF = 5 मी., EG = 50 मी.

$\therefore$ EFGH का क्षेत्रफल $= EF \times EG$

$= 5 \times 50 = 250$ मी.^{2}

पुनः आयत MNOP में MN = 5 मी., MO = 100 मी.

आयत MNOP का क्षेत्रफल $= 5 \times 100 = 500$ मी.^{2}

वर्ग IJLK का क्षेत्रफल = 5 मी. $\times$ 5 मी. = 25 मी.^{2}

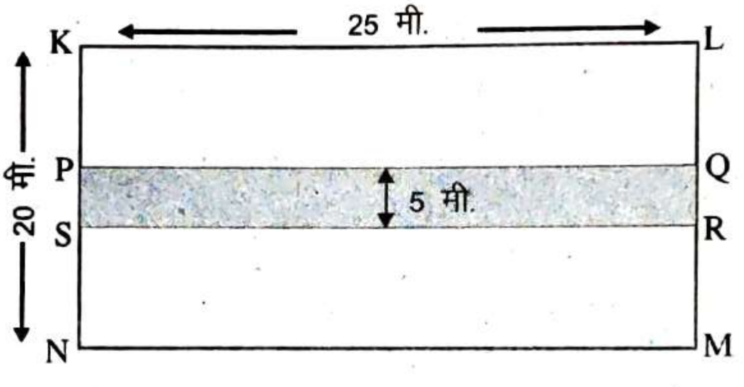
रास्ते का कुल क्षेत्रफल = (EFGH का क्षेत्रफल + MNOP का क्षेत्रफल) – IJKL का क्षेत्र.

= (250 मी.^{2} + 500 मी.^{2}) – 25 मी.^{2}

= 750 मी.^{2} – 25 मी.^{2} = 725 मी.^{2}

पथों को बनाने का व्यय $= 200 \times 725 = 145000$ रु.

उदाहरण–25. 25 मीटर लम्बाई और 20 मीटर चौड़ाई का एक पार्क है, उसमें लम्बाई के अनुदिश 5 मीटर चौड़ा रास्ता बनाया गया है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करें साथ ही रास्ता रहित पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



हल : छायांकित भाग रास्ता को दर्शाता है।

रास्ते का क्षेत्रफल = PQRS का क्षेत्रफल

$= PQ \times PS$

= 5 मी. $\times$ 25 मी. = 125 मी.^{2}

रास्ता सहित पार्क का क्षेत्रफल = KLMN का क्षे. = 25 मी. $\times$ 20 मी. = 500 मी.^{2}

रास्ता रहित पार्क का क्षेत्रफल = 500 मी.^{2} – रास्ते का क्षेत्रफल

= 500 मी.^{2} – 125 मी.^{2} = 375 मी.^{2}

प्रश्नावली–15.5

1. एक आयताकार पार्क की लम्बाई 40 मीटर और चौड़ाई 20 मीटर है। पार्क के बाहर चारों ओर 5 मीटर चौड़ा एक पथ बनाया गया है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

2. एक आयताकार घास का मैदान है, जिसकी लम्बाई 140 मीटर तथा चौड़ाई 80 मीटर है। इस मैदान के अन्दर से चारों ओर 5 मीटर चौड़ा रास्ता बनाया गया है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

3. एक पार्क 80 मीटर लम्बा और 70 मीटर चौड़ा है। इसके बाहर चारों ओर एक 5 मीटर चौड़ा रास्ता बनाना है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करें तथा पार्क का क्षेत्रफल हेक्टेयर में बताएँ।

4. 10 सेमी. लम्बे और 6 सेमी. चौड़े एक गत्ते पर एक चित्र की पेंटिंग इस प्रकार बनाई गई है कि इसकी प्रत्येक भुजाओं के अनुदिश 1.6 सेमी. चौड़ा हाशिया छोड़ा गया है। हाशिए का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करें।

5. 60 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार फुलवारी की परिसीमा से लगा भीतर की ओर 3 मीटर चौड़ा पथ बना हुआ है तो पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा 20.50 रुपये प्रति वर्गमीटर की दर से फुलवारी में बने रास्ते में ईंट सोलिंग कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

6. 800 मीटर लम्बे और 400 मीटर चौड़े एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर लम्बाई चौड़ाई के अनुदिश 10 मीटर चौडे दो रास्ते बने हुए हैं। रास्ते का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करें तथा रास्ते को छोड़कर पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें। उत्तर हेक्टेयर में दें।

7. संलग्न आकृति–15.28 एक आयताकार पार्क के मध्य की चौड़ाई को व्यास मानते हुए फूलों की एक वृत्ताकार क्यारी को दर्शाता है। फूलों की क्यारी की परिसीमा से 3 मीटर चौड़ा पथ अन्दर से वृत्ताकार बनाया गया है, तो ज्ञात कीजिए–

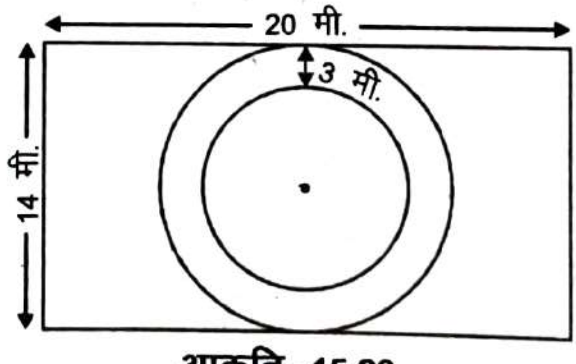
(i) पूरे पार्क का क्षेत्रफल

(ii) रास्ता सहित फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल

(iii) रास्ता रहित फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल

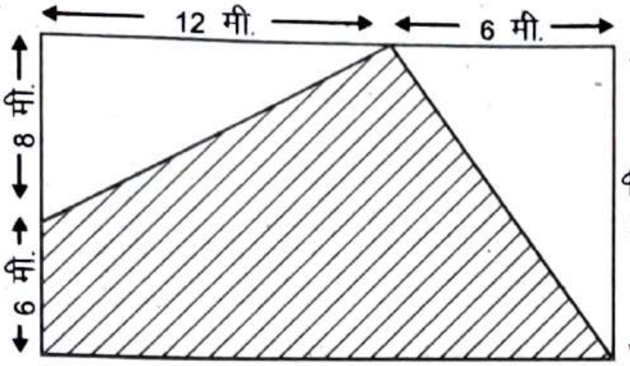
(iv) रास्ते का क्षेत्रफल

(v) फूलों की क्यारी रास्ता सहित को छोड़कर पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल

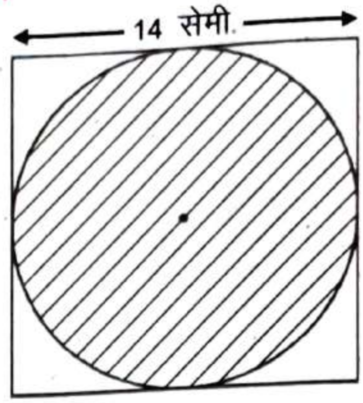


आकृति–15.28

8. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



(i)



(ii)

आकृति–15.29

9. चाय का एक आयताकार बागान 150 मीटर लम्बा और 75 मीटर चौड़ा है और उसके चारों ओर से बाहर से 8 मीटर चौड़ा एक पथ है। यदि प्रति 100 वर्गमीटर पथ बनाने का खर्च 10 रुपये 75 पैसा हो तो पूरा पथ बनाने में क्या खर्च पड़ेगा?

हमने सीखा

1. परिमाप (परिमिति) एक बंद आकृति के चारों ओर की दूरी की माप है जबकि क्षेत्रफल एक बंद आकृति द्वारा घेरे गये भाग को दर्शाता है।

2. आयत और वर्ग के परिमाप तथा क्षेत्रफल निकालने हेतु सूत्र–
   (i) आयत की परिमिति = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)
   (ii) वर्ग की परिमिति = 4 × भुजा
   (iii) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
   (iv) वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

3. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाई

5. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है।

6. वृत्त की परिधि = $\pi d = 2\pi r$ जहाँ d = व्यास, r = त्रिज्या और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) है।

7. एक वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2 जहाँ r = वृत्त की त्रिज्या है।

8. जिस प्रकार लम्बाई की इकाइयों का रूपांतरण करते हैं, उसी प्रकार क्षेत्रफलों की इकाइयों को भी रूपांतरित किया जा सकता है।

   1 सेमी.^{2} = 100 मिमी.^{2}, 1 मी.^{2} = 10000 सेमी.^{2},

   1 हेक्टेयर = 10000 मी.^{2}

9. क्षेत्रफल एवं परिमाप की उपयोगिता की चर्चा की।