

अध्याय-13 ज्यामितीय आकृतियों की रचना



भूमिका

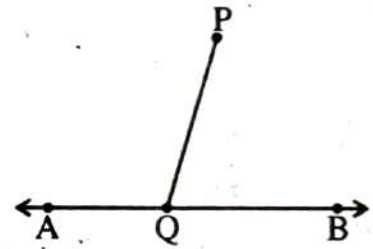
अभी तक आप विभिन्न आकृतियों एवं आकारों से परिचित हुए हैं। कुछ आकृतियों की रचना जिनमें रेखाखंड खींचना तथा उन्हें समद्विभाजित करना, लम्बवत् रेखा खींचना, कोण बनाना, कोण समद्विभाजित करना तथा वृत्त आदि की रचना करना आप सीख चुके हैं। इस अध्याय में हम एक रेखा के समान्तर रेखा खींचने एवं विभिन्न त्रिभुजों की रचना परकार एवं स्केल की सहायता से करना सीखेंगे।

13.1 दी गई रेखा के बाह्य स्थित किसी बिन्दु से उस रेखा के समान्तर दूसरी रेखा खींचना।

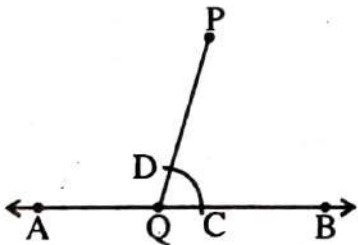
\overline{AB} एक सरल रेखा है। इस सरल रेखा \overline{AB} से बाहर स्थित एक बिन्दु P दिया है, अब इसी P बिन्दु से गुजरती \overline{AB} के समान्तर एक सरल रेखा खींचनी है।

रचना के चरण-

चरण-1 : रेखा \overline{AB} पर कोई बिन्दु Q लीजिए तथा इसे P बिन्दु से मिलाइए



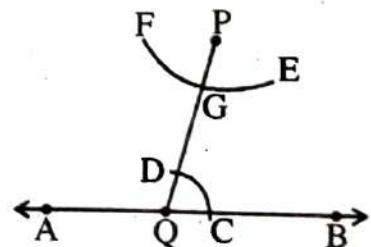
चित्र-13.1



चित्र-13.2

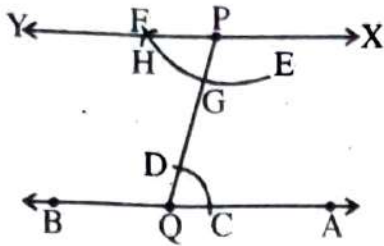
चरण-2 : बिन्दु Q को केन्द्र मानकर किसी भी त्रिज्या का चाप खींचिए। यह चाप रेखा \overline{AB} को जहाँ काटता है उसे C तथा \overline{PQ} को जहाँ काटे उसे D नाम दीजिए।

चरण-3 : अब P बिन्दु को केन्द्र मानते हुए उसी त्रिज्या का एक चाप EF खींचिए। यह चाप PQ को जिस बिन्दु पर काटता है उसे G नाम दीजिए।



चित्र-13.3

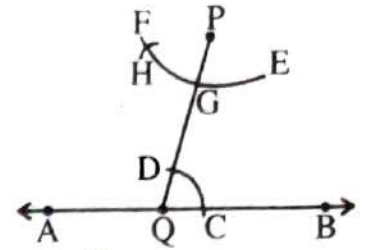
चरण-4 : CD चाप की लम्बाई के बराबर एक चाप G बिन्दु को केन्द्र मानकर (एकांतर क्रम में) खींचिए जो EF चाप को जिस बिन्दु पर काटे उसे H नाम दीजिए।



चित्र-13.5

चरण-5 : अब P व H को मिलाते हुए एक रेखा XY खींचिए। (चित्र-13.5) यहाँ

$\angle PQA = \angle QPY$ जो अंतःएकांतर कोण है तथा हम जानते हैं कि जब अंतःएकांतर कोण बराबर होते हैं तो रेखाएँ समान्तर होती हैं, अतः $AB \parallel XY$



चित्र-13.4

कुछ करें

1. चित्र-13.5 में P बिन्दु से गुजरने वाली कुछ और रेखाओं को खींचिए। बताइए \overline{XY} रेखा के अतिरिक्त आपने क्या और कोई और रेखा खींची जो \overline{AB} के समान्तर है, यदि नहीं तो \overline{XY} के अतिरिक्त P बिन्दु से गुजरने वाली रेखाएँ रेखा \overline{AB} के लिए कैसी रेखाएँ होंगी?
2. उपर की रचना में एकांतर अंतःकोण के अलावा और कौन-कौन कोण बनाकर \overline{AB} के समान्तर रेखा खींच सकते हैं?

प्रश्नावली-13.1

1. R, \overline{MN} रेखा के बाहर स्थित एक बिन्दु है। R से गुजरती \overline{MN} के समान्तर एक दूसरी रेखा खींचिए।
2. परकार एवं स्केल की सहायता से 60° का एक कोण $\angle ABC$ बनाइए। कोण के शीर्ष B से भुजा AB पर 4 सेमी. दूर भुजा BC के समान्तर एक रेखा खींचिए।
3. l एक रेखा खींचिए। इसके A बिन्दु पर m एक लम्बवत् रेखा खींचिए। पुनः m पर स्थित किसी B पर एक लम्बवत् रेखा n खींचिए, बताइए क्या रेखा n रेखा l के समान्तर है यदि हाँ तो कैसे?
4. AB एक रेखा खींचिए। AB से 5 सेमी. दूर एक ऐसी रेखा CD खींचिए जो AB के समान्तर हो।

13.2 त्रिभुज की रचना

सर्वांगसमता में हमने पढ़ा है कि त्रिभुज के कोई तीन अवयव ज्ञात होने पर सर्वांगसम त्रिभुज बनाया जा सकता है। इस अनुच्छेद में हम उन्हीं प्रतिबन्धों के साथ त्रिभुज की रचना करेंगे। पहले एक बार उन्हें पुनः याद कर लें—

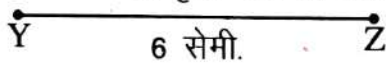
- त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई (SSS प्रतिबन्ध)
- दो भुजाओं की लम्बाई व उनके बीच का कोण (SAS प्रतिबन्ध)
- एक भुजा और उस पर बनने वाले दोनों कोण (ASA प्रतिबन्ध)
- समकोण त्रिभुज में कर्ण व कोई अन्य एक भुजा (RHS प्रतिबन्ध)

हमने यह भी देखा था कि इन प्रतिबन्धों के अतिरिक्त अन्य प्रतिबन्धों में एक अद्वितीय सर्वांगसम त्रिभुज नहीं बनाया जा सकता है। आइए इन्हीं अवधारणाओं के आधार पर त्रिभुज की रचना करेंगे।

13.2.1 एक त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाओं की लम्बाइयाँ दी गई हों। (SSS प्रतिबन्ध)

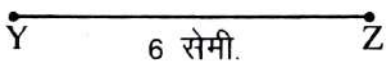
उदाहरण-1. एक त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जिसमें $XY = 4$ सेमी., $YZ = 6$ सेमी. तथा $XZ = 7$ सेमी. दिया हो।

हल : **चरण-1 :** पहले हम दी गई मापों के आधार पर एक रफ आकृति खींचते हैं।



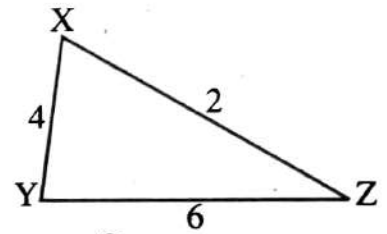
चित्र-13.7

चरण-2 : 6 सेमी. लम्बाई का एक रेखाखण्ड खींचिए।
चरण-3 : चूँकि रफ चित्र में X, Y से 4 सेमी. दूर है अतः Y को केन्द्र मानकर 4 सेमी. त्रिज्या का चाप खींचिए। X बिन्दु इसी चाप पर कहीं स्थित होगा। X बिन्दु चाप पर कहाँ स्थित है इसका पता लगाने हेतु अगले चरण की ओर बढ़ेंगे।

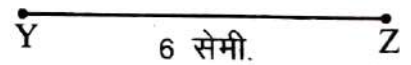


चित्र-13.9

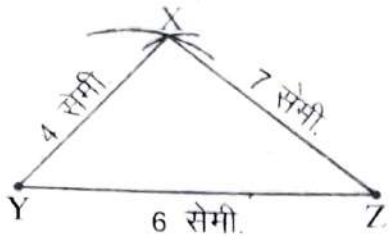
चरण-4 : X बिन्दु इस चाप पर कहाँ है, इसको पता करने हेतु Z को केन्द्र मानकर 7 सेमी. का चाप खींचिए (क्योंकि बिन्दु X, Z से 7 सेमी. दूर है) जो पूर्व में बने चाप को एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करेगा। यही X बिन्दु है।



चित्र-13.6



चित्र-13.8



चित्र-13.10

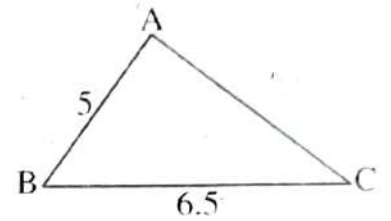
चरण-5 : अब बिन्दु X को क्रमशः Y एवं Z से मिलाइए। यह अभीष्ट त्रिभुज XYZ है।

(SSS प्रतिबंध के अन्तर्गत त्रिभुज की रचना करते समय हमें यह हमेशा ध्यान रखना होगा कि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की लम्बाई का योग हमेशा तीसरी भुजा से ज्यादा होता है, अन्यथा त्रिभुज की रचना संभव नहीं है।)

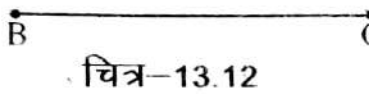
13.2.2 जब दो भुजाएँ एवं उनके बीच के कोण की माप ज्ञात हो (SAS प्रतिबंध)

उदाहरण-2. एक त्रिभुज ABC की रचना करें जब AB = 5 सेमी, BC = 6.5 सेमी, तथा $\angle B = 75^\circ$ दिया है।

हल : चरण-1 : सर्वप्रथम एक रफ चित्र बनाएँ।



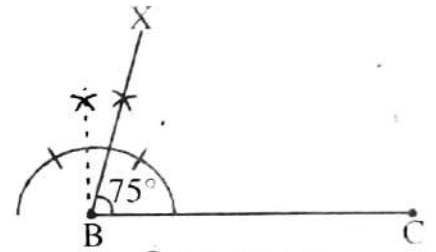
चित्र-13.11



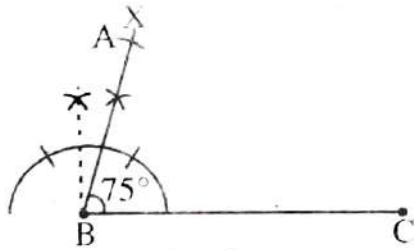
चित्र-13.12

चरण-2 : सबसे पहले 6.5 सेमी. लम्बाई का एक रेखाखंड BC खींचिए।

चरण-3 : फिर रेखाखंड के B बिन्दु पर 75° का कोण बनाते हैं। त्रिभुज का A बिन्दु कोण बनाने वाली इसी भुजा BX पर स्थित होगा।



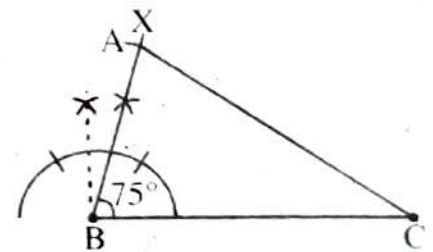
चित्र-13.13



चित्र-13.14

चरण-4 : कोण बनाने वाली इस भुजा पर स्थित बिन्दु A का पता लगाने के लिए B को केन्द्र मानकर 5 सेमी. का चाप खींचा। रेखा BX को जिस बिन्दु पर काटता है वही बिन्दु A है।

चरण-5 : बिन्दु A को बिन्दु C से मिलाइए। इस प्रकार अभीष्ट त्रिभुज ABC बना।



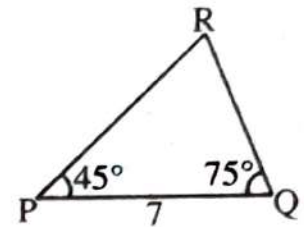
चित्र-13.15

13.2.3 त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोण एवं उनके बीच की भुजा की माप दी गई है। (ASA प्रतिबंध)

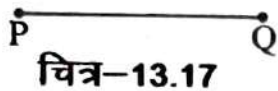
उदाहरण-3 एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जहां $\overline{PQ} = 7$ सेमी. $\angle P = 45^\circ$ तथा $\angle Q = 75^\circ$ हो।

त्रिभुज PQR की रचना के निम्न चरण हो सकते हैं-

चरण-1 : एक रफ चित्र बनाएँ।



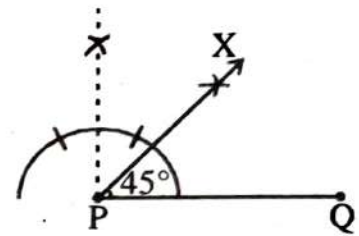
चित्र-13.16



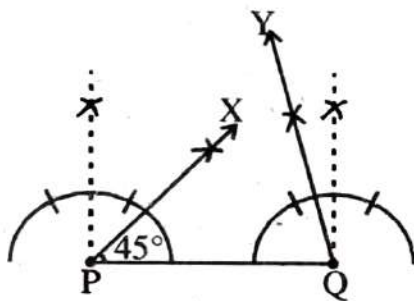
चित्र-13.17

चरण-2 : 7 सेमी. की लम्बाई का एक रेखाखंड \overline{PQ} खींचिए।

चरण-3 : रेखाखंड PQ के P बिन्दु पर 45° का कोण बनाइए। कोण बनाने वाली किरण \overline{PX} पर ही बिन्दु R होगा।



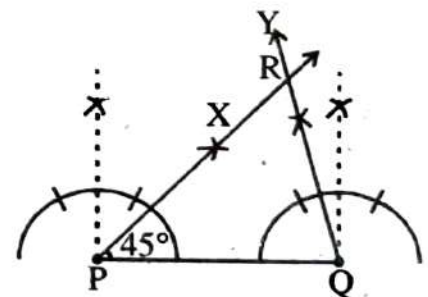
चित्र-13.18



चित्र-13.19

चरण-4 : PQ रेखाखंड के Q बिन्दु पर 75° का कोण बनाइए। कोण बनाने वाली \overline{QY} किरण पर ही बिन्दु R स्थित होगा।

चरण-5 : R बिन्दु, कोण बनाने वाली दोनों किरणों पर स्थित है अर्थात् यह उनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर स्थित है। प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त करने के लिए \overline{PX} और \overline{PY} को आवश्यकतानुसार बढ़ाइए। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ही R है। इस प्रकार अभीष्ट त्रिभुज PQR की रचना हुई।



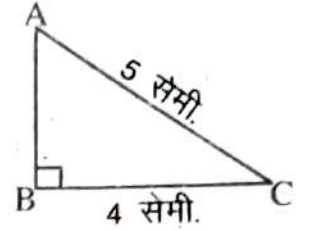
चित्र-13.20

13.2.4 एक समकोण त्रिभुज की रचना जिसमें उसके कर्ण एवं समकोण बनाने वाली किसी एक भुजा की लम्बाई दी हो। (RHS प्रतिबंध)

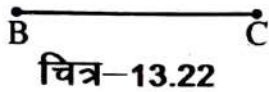
उदाहरण-4. एक समकोण $\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसमें $\angle B$ समकोण है तथा समकोण बनाने वाली दो भुजाओं में से एक भुजा $BC = 4$ सेमी. तथा कर्ण $AC = 5$ सेमी. है।

समकोण $\triangle ABC$ की रचना के निम्न चरण हो सकते हैं।

चरण-1 : पहले हम दिए गए मापों के आधार पर एक रफ आकृति बनाते हैं।



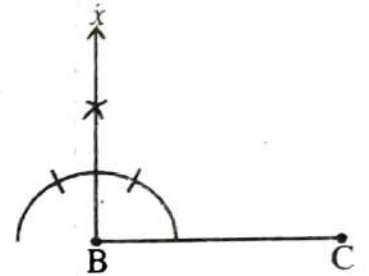
चित्र-13.21



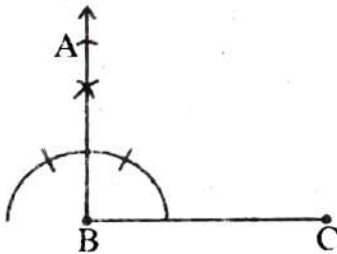
चित्र-13.22

चरण-2 : 4 सेमी. का एक रेखाखंड BC खींचिए।

चरण-3 : रेखाखंड BC के B बिन्दु पर 90° का कोण बनाइए। कोण बनाने वाली इसी भुजा पर त्रिभुज का A बिन्दु स्थित होगा।



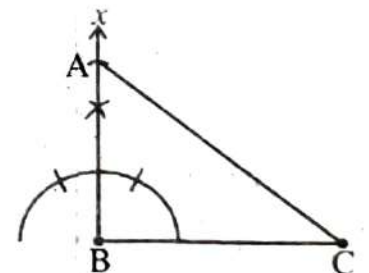
चित्र-13.23



चित्र-13.24

चरण-4 : अब C बिन्दु को केन्द्र मानकर $AC = 5$ सेमी. का एक चाप खींचिए। चूँकि A बिन्दु इसी चाप पर कहीं स्थित होगा। अर्थात् यह चाप एवं समकोण बनाने वाली रेखा BX के प्रतिच्छेद बिन्दु पर होगा।

चरण-5 : बिन्दु A को बिन्दु C से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट समकोण $\triangle ABC$ की रचना हुई।



चित्र-13.25

प्रश्नावली - 13.2

1. एक त्रिभुज ABC की रचना करें जिसमें भुजा AB = 3 सेमी., भुजा BC = 4 सेमी. तथा भुजा AC = 5 सेमी. हो।
2. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें भुजा BC = CA = 5 सेमी. तथा AB = 6 सेमी. हो।
3. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी तीनों भुजाएँ 5.5 सेमी. हों।
4. एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें $\angle R = 30^\circ$ भुजा QR = 4 सेमी. तथा RP = 5 सेमी. हो।
5. ABC त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें भुजा AB = AC = 6 सेमी. हो तथा $\angle BAC = 60^\circ$ हो।
6. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी. एवं 5 सेमी. हों तथा उनके बीच का कोण 120° हो।
7. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = \angle C = 40^\circ$ एवं भुजा BC = 8 सेमी. हो।
8. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें $\angle P = 40^\circ$, $\angle Q = 60^\circ$ तथा भुजा PQ = 7 सेमी. हो।
9. त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जहाँ $\angle X = 30^\circ$, $\angle Y = 40^\circ$ एवं भुजा XY = 7 सेमी. हो।
10. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसकी भुजा BC = 6 सेमी. तथा कोण $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ हो।
11. त्रिभुज DEF की रचना कीजिए जिसमें $\angle D = 45^\circ$, $\angle F = 45^\circ$ तथा DF = 10 सेमी. हो।
12. एक ऐसे समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका कर्ण 5 सेमी. तथा समकोण बनाने वाली दो भुजाओं में से एक की लम्बाई 3 सेमी. हो।
13. समकोण त्रिभुज ΔPQR बनाये जिसमें कर्ण PQ = 10 सेमी., QR = 6 सेमी.।

14. समकोण त्रिभुज ΔABC की रचना कीजिए जिसमें समकोण बनाने वाली दोनों भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 6 सेमी. एवं 8 सेमी. हैं।
15. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें समान भुजाओं की लम्बाई 6 सेमी. है।
16. ΔABC की रचना करें जिसमें $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ एवं भुजा $BC = 6$ सेमी.।

हमने सीखा

इस अध्याय में हमने पैमाना और परकार की सहायता से कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है।

1. किसी रेखा के बाहर स्थित किसी बिंदु से उस रेखा के समान्तर रेखा खींचने के लिए समान एकान्तर कोणों की अवधारणा का उपयोग किया है।
2. त्रिभुजों की रचना में हमने त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग किया है। संकल्पनाएँ निम्नवत् हैं।
 - (i) SSS : त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाई दी हुई हो।
 - (ii) SAS : किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई और इन भुजाओं के मध्य स्थित कोण का माप दिया हुआ हो।
 - (iii) ASA : दो कोणों की माप और उनके मध्य स्थित भुजा की लम्बाई दी हुई हो।
 - (iv) RHS : समकोण त्रिभुज के कर्ण एवं शेष दो भुजाओं में से एक भुजा की लम्बाई दी हुई है।