



अध्याय-1

पूर्णांक की समझ

1.1 भूमिका

हम पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णाकों से परिचित हैं। इस अध्याय में पूर्णाकों, उनके गुणों एवं संक्रियाओं के बारे में और अधिक चर्चा करेंगे पर इससे पहले हम पूर्ण संख्या एवं पूर्णाकों की पुनरावृत्ति कर लेंगे।

1.2 पुनरावलोकन

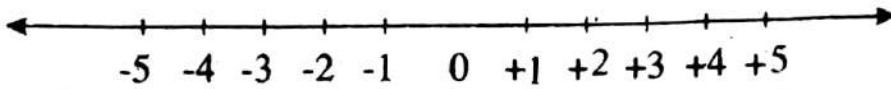
पिछली कक्षा में हमने सीखा:

- (i) यदि भूमितल से एक पहाड़ की ऊँचाई 560 मीटर है तथा कुएँ की गहराई 65 मीटर तो पहाड़ की ऊँचाई को + 560 मीटर तथा कुएँ की ऊँचाई (गहराई) को - 65 मीटर द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि यदि ऊँचाई को धनपूर्णांक से व्यक्त करते हैं तो गहराई को ऋण पूर्णांक से व्यक्त करेंगे।
- (ii) लाभ को धन पूर्णांक से तथा हानि को ऋण पूर्णांक से प्रकट कर सकते हैं।
- (iii) '0' से ऊपर के ताप को धनात्मक तथा '0' से नीचे के ताप को ऋणात्मक रूप में व्यक्त करते हैं।

यहाँ विभिन्न राशियों की सूची दी गई है, जिन्हें धन पूर्णाकों से दर्शाते हैं, तो इनके विपरीत कौन-सी राशियाँ होंगी जिन्हें ऋण पूर्णाकों में व्यक्त कर सकते हैं?

क्र.सं.	धन पूर्णाकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ	ऋण पूर्णाकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ
1.	समुद्र तल से ऊँचाई	
2.	आबादी में वृद्धि	
3.	औसत से अधिक वर्षा	

4.	0°C से ऊपर का ताप	
5.	किसी स्थान से दायीं ओर की दूरी	
6.	लाभ	
7.	मूल्य वृद्धि	
8.	जमा धन	
9.	औसत से अधिक उपज	



हम जानते हैं—

... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 आदि पूर्णांक हैं जिनमें 1, 2, 3, 4, 5, आदि धन पूर्णांक हैं तथा -1, -2, -3, -4, -5, आदि ऋण पूर्णांक हैं।

1. '0' (शून्य) न तो धन पूर्णांक है न ऋण पूर्णांक है।
2. '0' के बाद की संख्याएँ बढ़ते क्रम में है।
3. '0' के पूर्व की संख्याएँ घटते क्रम में है।
4. संख्या-रेखा पर बाएँ से दाएँ की संख्याएँ बड़ी होती है।
5. संख्या-रेखा पर दाएँ से बाएँ की संख्याएँ छोटी होती है।
6. शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा तथा प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।
7. धनात्मक पूर्णाकों में यदि $a > b$ तो ऋणात्मक पूर्णाकों में $-a < -b$ जैसे $8 > 4$ तो $-8 < -4$
8. किसी पूर्णांक के विपरीत चिह्न के पूर्णांक को उसका योगात्मक प्रतिलोम या योज्य प्रतिलोम (Additive inverse) कहते हैं, जैसे 5 का योगात्मक प्रतिलोम -5 है तथा -8 का योज्य प्रतिलोम +8 है। दो योगात्मक प्रतिलोमों का योग शून्य होता है। जैसे $-5 + (-5) = 0$, $-5 + 5 = 0$; इस आधार पर यदि दो पूर्णाकों का योग शून्य होता है तो वे एक दूसरे का योगात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं।

स्वयं करके देखिए

पूर्णांक	8	-5	-12	15	-20	16	18
योज्य प्रतिलोम	-8	+5					
तर्क	$(8)+(-8)=0$	$(-5)+(5)=0$					

समग्र शिक्षा 2021-22

हम अपनी पिछली कक्षा में पूर्णाकों के योग एवं व्यवकलन के बारे में अध्ययन कर चुके हैं कि किसी संख्या रेखा पर जब हम—

- (i) एक धनात्मक पूर्णाक को जोड़ते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।
- (ii) एक ऋणात्मक पूर्णाक को जोड़ते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।
- (iii) एक धनात्मक पूर्णाक को घटाते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।
- (iv) एक ऋणात्मक पूर्णाक को घटाते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।

बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत। जो कथन गलत है उनको सही कीजिए—

- (i) जब दो धनात्मक पूर्णाकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णाक प्राप्त होता है।
- (ii) जब दो ऋणात्मक पूर्णाकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णाक प्राप्त होता है।
- (iii) जब एक धनात्मक पूर्णाक और एक ऋणात्मक पूर्णाक को जोड़ा जाता है, तो हमें हमेशा एक ऋणात्मक पूर्णाक प्राप्त होता है।
- (iv) $-4 + (-8) + (12) + (-18) + (5) = -13$
- (v) $(-10) + 3 = 10 - 3$
- (vi) $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

अपने उत्तरों की तुलना निम्नलिखित उत्तरों के साथ कीजिए—

(i) सही है। उदाहरणतः

(a) $56 + 73 = 129$

(b) $113 + 82 = 195$

(c) $15 + 25 = 40$

(d) $20 + 30 + 15 = 65$ आदि।

अतः धनात्मक पूर्णाकों का योगफल एक धनात्मक पूर्णाक होती है। ऐसे 5 और उदाहरण दीजिए।

- (ii) गलत है क्योंकि $(-5) + (-8) = -13$, जो कि धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

$$(-18) + (-7) + (-5) = -30$$

अतः ऋणात्मक पूर्णाकों का योगफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होती है। इस कथन के पक्ष में पाँच और उदाहरण दीजिए।

(ऋणात्मक पूर्णाकों का योगफल में पूर्णाकों के विशुद्ध मान को जोड़कर योगफल के पहले (-) चिह्न लगा देते हैं।)

स्वयं करके देखिए

$$-8 + (12) =$$

$$25 + (-75) =$$

$$-28 + (-52) =$$

$$50 + 88 =$$

$$-20 + (-15) + 50 =$$

$$-12 + (-4) + (-10) + 15 + 18 =$$

- (iii) गलत, क्योंकि $(-8) + (20) = 12$, यह एक ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

$$(+15) + (-50) = -35$$

अतः जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक अथवा एक ऋणात्मक और एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है तो संख्या को घटा देते हैं और बड़े पूर्णांक का चिह्न उस अन्तर के पहले रख दिया जाता है। बड़े पूर्णाकों का निर्णय दोनों पूर्णाकों के चिह्नों की अवहेलना करते हुए लिया जाता है। जैसा कि ऊपर के उदाहरण से स्पष्ट है।

- (iv) सही हैं, $-4 + (-8) + (12) + (-18) + (5)$ को सरल इस प्रकार किया जाता है।

$$-4 + (-8) + (12) + (-18) + (5) \text{ या } -30 + 17 = -13$$

अतः दो से अधिक ऋणात्मक और धनात्मक का योगफल ज्ञात करने के लिए धनात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ और ऋणात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ ज्ञात करने के बाद पुनः उनका अन्तर नियम (iii) के अनुसार प्राप्त कर लेते हैं। अतः पूर्णाकों का योगफल एक पूर्णांक होता है।

- (v) $-7 \neq 7$, असत्य

- (vi) $8 + (-7) - (-4) = 8 - 7 + 4 = 12 - 7$ तथा $8 + 7 - 4 = 15 - 4 = 11$

अतः $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$, असत्य

1.3 पूर्णाकों के जोड़ व घटाव के गुण

1.3.1 योग के अंतर्गत संवृत

हम सीख चुके हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग पुनः एक पूर्ण संख्या ही होती है। उदाहरणतः $5 + 8 = 13$ है, जो कि एक पूर्ण संख्या है। हम जानते हैं कि यह गुण, पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण कहलाता है।

आइए देखें कि क्या यह गुण पूर्णाकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं। पूर्णाकों के कुछ युग्म आगे दिए जा रहे हैं। आगे दी हुई सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए—

कथन

प्रेक्षण

- (i) $8 + 4 = 12$
 (ii) $(-3) + 5 = \text{-----}$
 (iii) $(25) + 8 = \text{-----}$
 (iv) $19 + (-25) = -6$
 (v) $5 + (-3) = \text{-----}$
 (vi) $(-20) + 0 = \text{-----}$
 (vii) $(-7) + (-8) = \text{-----}$

परिणाम एक पूर्णांक है।

परिणाम एक पूर्णांक है।

क्या दो पूर्णाकों का योग हमेशा एक पूर्णांक प्राप्त होता है? क्या आपको पूर्णाकों का कोई ऐसा युग्म मिला जिसका योग पूर्णांक नहीं है? इस प्रकार पूर्णांक का योग एक पूर्णांक होता है, इसलिए हम कहते हैं कि पूर्णांक, योग के अंतर्गत संवृत (closed) होता है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णाकों a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्णांक होता है।

1.3.2 क्रम विनिमेय गुणधर्म

$(-3) + (-5) = -8$ पुनः $(-5) + (-3) = -8$

तो हम पाते हैं कि $(-3) + (-5) = (-5) + (-3)$

अतः दो पूर्णांक संख्याओं का योगफल एवं उनके उल्टे क्रम का योगफल समान होते हैं। इस गुण को क्रम विनिमेय गुण (commutative property) कहते हैं। आप अन्य पूर्णाकों के साथ करके देखिए। क्या आपको ऐसे पूर्णांक मिले जो क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता? व्यापक रूप में a और b दो पूर्णांक हैं तो $a + b = b + a$, वह क्रम विनिमेय गुण है।

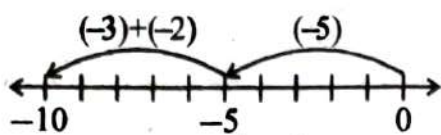
1.3.3 साहचर्य गुण (सहचरी)

निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए:

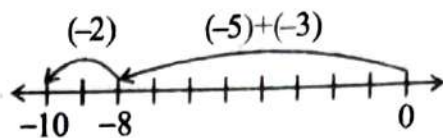
पूर्णाकों -3 , -2 एवं -5 को लीजिए।

$(-5) + [(-3) + (-2)]$ और $[(-5) + (-3)] + (-2)$ पर ध्यान दीजिए।

प्रथम योग में (-3) और (-2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरे योग में (-5) एवं (-3) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है। हम इसकी जाँच करेंगे कि हमें क्या परिणाम प्राप्त होते हैं?



$$(-5) + [(-3) + (-2)]$$



$$[(-5) + (-3)] + (-2)$$

इन दोनों ही स्थितियों में हमें -10 प्राप्त होता है।

अर्थात् $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$

इसी प्रकार, $1, -3,$ और -7 को लीजिए।

$$(-3) + [1 + (-7)] = -3 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[(-3) + 1] + (-7) = -2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

क्या $(-3) + [1 + (-7)]$ एवं $[-3 + 1] + (-7)$ का हल समान है?

इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएँगे जिसके लिए इस तरह के योग भिन्न हैं। यह दर्शाता है कि पूर्णाकों के लिए योग सहचारी (associative) होता है। व्यापक रूप में,

पूर्णाकों a, b और c के लिए हम कह सकते हैं कि $a + (b + c) = (a + b) + c$

1.3.4 योज्य तत्समक

निम्न पर विचार करें—

(i) $(-5) + 0 = -5$

(ii) $2 + 0 = 2$

पुनः $0 + (-5) = -5$

पुनः $0 + 2 = 2$

$\Rightarrow (-5) + 0 = 0 + (-5) = -5$

$0 + 2 = 2 + 0$

अतः हम कह सकते हैं कि किसी पूर्णांक a के लिए

$$a + 0 = a \quad \text{एवं} \quad 0 + a = a$$

तब a जोड़ के लिए '0' (शून्य) पूर्णांक में योज्य तत्समक (Additive identity) कहलाता है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित के सामने उसके उचित गुणों को लिखें-

1.	$5 + (-2) = -2 + 5$	
2.	$\{(-2)+5\} + (-4) = -2 + \{5 + (-4)\}$	
3.	$-25 + 0 = -25$	
4.	$-12 + (-5) = -17$	

1.4 पूर्णाकों का व्यवकलन (Subtraction) : देखिए और समझिए

(i) $12 - 20 = -8$

(ii) $8 - (-5) = 8 + 5 = 13$

(iii) $-5 - (-4) = -5 + 4 = -1$

(iv) $-10 - (4) = -10 - 4 = -14$

स्वयं करके देखिए

$-5 - (-50) =$

$20 - (-45) =$

$-55 - (+75) =$

$-60 - (-4) =$

1.5 पूर्णाकों का गुण (व्यवकलन के लिए)

(a) $-10 - (5) = -15$

(b) $6 - (-10) = 6 + 10 = 16$

अतः दो पूर्णाकों का अन्तर एक पूर्णाक संख्या होती है, इसे घटाव का संवरक गुण (closure property) कहते हैं। आप उदाहरण लेकर देखिए क्या कोई ऐसे पूर्णाक भी मिले जिनका अन्तर एक पूर्णाक न हो? व्यापक रूप में a और b दो पूर्णाक संख्याएँ हैं तो $a - b$ भी एक पूर्णाक संख्या होगी।

स्वयं करके देखिए

4, 12, 20, 28, _____, _____, _____

8, 6, 4, _____, _____, _____, _____

-8, -12, _____, -20, _____, _____

-15, -10, -5, _____, _____, _____

ऐसे कुछ और pattern बनाइए और स्वयं या अपने मित्रों से करवाइए।

प्रश्नावली-1.1

1. निम्नलिखित के बीच की सभी पूर्णाक संख्याएँ लिखिए।

- (a) -5 और 5 (b) -2 और 8
(c) -6 और -2 (d) -4 और -10

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में बड़े पूर्णाक पर घेरा (○) लगाएँ।

- (a) -20, 4 (b) -15, -8 (c) 0, -5
(d) -20, -7 (e) 25, -2 (f) -20, -18

3. रिक्त स्थानों में उचित चिह्न (>, < और =) को भरिए।

- (a) $-6 \square -8$ (b) $4 \square 0$ (c) $-15 \square 2$
(d) $-50 \square -54 + 4$ (e) $25 \square 25$ (f) $4 - 15 \square 2 - 20$

4. नीचे दिए गए पूर्णाकों को बढ़ते क्रम में लिखिए।

- (a) -8, 12, -5, 15, 20, -2 (b) 5, 0, -2, -4, -15, 8

5. नीचे दिए गए पूर्णाकों की अगली पूर्णाक संख्या बताइए।

- (a) -18 (b) 15 (c) -20
(d) 18 (e) -5

6. नीचे दिए गए पूर्णाकों के पहले का पूर्णाक बताइए।

- (a) 25 (b) -59 (c) -55
(d) -26 (e) +100

7. रिक्त स्थान भरिए-

- (i) $(-5) + (2) = \dots\dots\dots$ $(2) + (-5) = \dots\dots\dots$

क्या $(-5) + (2) = 2 + (-5)$ है? $\dots\dots\dots$

कुछ अन्य पूर्णांक संख्याएं लेकर सारणी को पूरा कीजिए व जाँचिए-

	a	b	a+b	b+a	क्या $(a+b)=(b+a)$ है?	a-b	b-a	क्या $(a-b)=(b-a)$ है?
(i)	-6	3	-6+3 =-3	3+(-6) =-3		(-6)-(3) =-9	(3)-(-6) = 9	
(ii)								
(iii)								

8. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (i) $(-a) + (6) = (6) + (\quad)$
 (ii) $-8 + \dots = 0$
 (iii) $(2) + [9 + (-6)] = [2 + 9] + (\dots)$
 (iv) $15 + \dots = 15$

9. निम्नलिखित को जोड़िए।

- (a) -15 में -18 को
 (b) -20 में 17 को
 (c) +24 में -16 को
 (d) -8 में 5 को

10. निम्नलिखित को घटाइए।

- (a) -15 में से -5 को
 (b) 25 में से -75 को
 (c) -8 में से -16 को
 (d) -20 में से -18 को

11. निम्नलिखित गुणों का एक-एक उदाहरण दीजिए।

- (a) क्रम विनिमेय नियम (गुण)
 (b) साहचर्य गुण
 (c) संवरक नियम
 (d) योज्य तत्समक

12. ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका -

- (a) योग -8
 (b) अन्तर -18 है
 (c) योग 0 है।

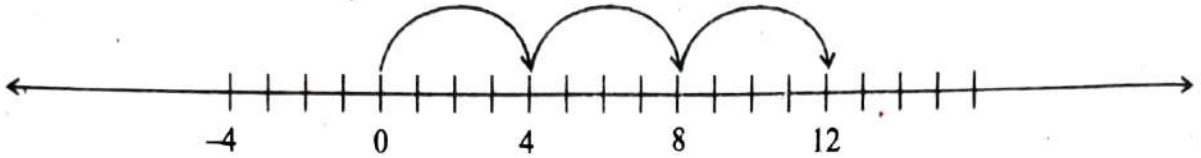
(संकेत (a) के लिए (i) $-5 + (-3) = -8$ (ii) $-1 + (-7) = -8$)

1.6 पूर्णाकों का गुणा (Multiplication of integers)

धन पूर्णाकों का गुणा-

हम जानते हैं 4×3 यानी 4 तीन बार अर्थात् $4 + 4 + 4 = 12$

इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं-

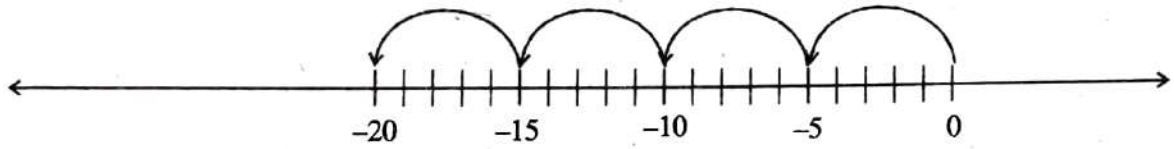


संख्या रेखा से स्पष्ट है $\rightarrow 4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$ अतः $3 \times 4 = 12$

धन पूर्णाक का ऋण पूर्णाक से गुणा-

जैसे $4 \times (-5)$ का अर्थ है: -5 को चार बार जोड़ना।

अतः प्रकार $(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$ है, संख्या-रेखा द्वारा इसे इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं -



संख्या रेखा से स्पष्ट है $\rightarrow (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = 4 \times -5 = -20$

स्पष्ट है कि-

(i) दो धन पूर्णाकों का गुणनफल धनात्मक होता है।

माना कि $+a$ और $+b$ दो धन पूर्णाक है।

$$\therefore (+a) \times (+b) = +ab$$

(ii) एक धन पूर्णाक का दूसरे ऋण पूर्णाक से गुणा करने से प्राप्त गुणनफल ऋणात्मक होता है।

माना कि $+a$ और $-b$ दो पूर्णाक है।

$$\therefore (+a) \times (-b) = -ab$$

स्वयं करके देखिए

$$5 \times (-6) =$$

$$4 \times (-2) =$$

$$3 \times (-4) =$$

$$5 \times (-2) =$$

$$2 \times 7 =$$

आइए निम्न पैटर्न पर विचार करें

$$\begin{aligned} 5 \times 3 &= 15 \\ 5 \times 2 &= 10 \\ 5 \times 1 &= 5 \\ 5 \times 0 &= 0 \\ 5 \times (-1) &=? \end{aligned}$$

बगल की सारणी में गुणनफल के पैटर्न को देखने से पता चलता है कि ऊपर से नीचे की ओर संख्या क्रमशः 5 कम होती जाती है।
अतः $5 \times (-1) = -5$

इसी प्रकार से इनके लिए भी पैटर्न बनाइए—

- (i) 4×3 से शुरू कीजिए।
- (ii) 7×3 से शुरू कीजिए।

अतः एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक का गुणा करने पर सदैव एक ऋण पूर्णांक प्राप्त होता है।

दो ऋण पूर्णांक का गुणा
पुनः निम्न पैटर्न पर विचार करें—

$$\begin{aligned} 5 \times (-1) &= -5 \downarrow \\ 4 \times (-1) &= -4 \\ 3 \times (-1) &= -3 \\ 2 \times (-1) &= -2 \\ 1 \times (-1) &= -1 \\ 0 \times (-1) &= 0 \\ (-1) \times (-1) &=? \end{aligned}$$

बगल की सारणी में गुणनफल के पैटर्न को देखने से पता चलता है कि ऊपर से नीचे की ओर संख्या का मान क्रमशः 1 (एक) अधिक होता जाता है। अतः $-1 \times (-1) = +1$ इस पैटर्न को आगे बढ़ाइए।

$$(+a) \times (+b) = +ab$$

$$(-a) \times (-b) = +ab$$

$$(-a) \times (+b) = -ab$$

$$(+a) \times (-b) = -ab$$

ऐसे और पैटर्न बनाएँ— (i) -5×3 से शुरू करें (ii) -3×4 से शुरू करें

अतः जब दो ऋण पूर्णाकों को गुणा किया जाता है तो सदैव एक धन पूर्णांक प्राप्त होता

है।



निम्न उदाहरण को पढ़ें और समझें-

- (i) $(+5) \times (+4) = +20$ या $5 \times 4 = 20$
(ii) $(-5) \times (+4) = -20$ या $-5 \times 4 = -20$
(iii) $(+8) \times (-2) = -16$ या $8 \times (-2) = -16$
(iv) $-10 \times (-5) = +50$ या $-10 \times (-5) = 50$

स्वयं करके देखिए

- (i) $-8 \times (-20) =$ (ii) $-5 \times (-15) =$ (iii) $-10 \times 40 =$
(iv) $-30 \times 20 =$ (v) $18 \times 4 =$ (vi) $16 \times (-5) =$

प्रयास कीजिए : प्रत्येक घर में स्तम्भ और क्षैतिज संख्या से गुणा कीजिए व भरिए-

x	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	-81																			
8																				
7																				
6																				
5																				
4																				
3																				
2																				
1																				
-1																				
-2																				
-3																				
-4																				
-5																				
-6																				

1.7 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णाकों का गुणनफल : आइए निम्नलिखित उदाहरणों को देखें—

(a) $(-2) \times (-4) = 8$

(b) $(-2) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-4)] \times (-5) = 8 \times -5 = -40$

(c) $(-3) \times (-4) \times (-6) \times (-8) = [(-3) \times (-4)] \times [(-6) \times (-8)] = 12 \times 48 = 576$

(d) $(-4) \times (-5) \times (-2) \times (-6) \times (-3) = [(-4) \times (-5)] \times [(-2) \times (-6)] \times (-3) = 20 \times 12 \times (-3) = 240 \times (-3) = -720$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि—

- (a) पहले दो पूर्णाकों का गुणनफल प्राप्त करते हैं। फिर प्राप्त गुणनफल को अन्य पूर्णाक से गुणा करते हैं।
- (b) दो ऋणात्मक पूर्णाकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णाक है।
- (c) तीन ऋणात्मक पूर्णाकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णाक होता है।
- (d) चार ऋणात्मक पूर्णाक का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णाक है।

अतः प्रेक्षणों से स्पष्ट होता है कि यदि ऋणात्मक पूर्णाक को सम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल धनात्मक पूर्णाक प्राप्त होता है, जबकि ऋणात्मक पूर्णाक को विषम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल ऋणात्मक पूर्णाक प्राप्त होता है।

आप भी पाँच ऋणात्मक पूर्णाक लेकर गुणनफल की जाँच कीजिए, क्या गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होता है या नहीं?

1.8 पूर्णाकों के गुणन संक्रिया के गुण

I. गुणन के लिए संवरक

निम्न पर विचार करें—

$$4 \times 2 = 8$$

$$-5 \times -3 = 15$$

$$-2 \times 4 = -8$$

$$3 \times -6 = -18$$

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो पूर्णाकों का गुणनफल एक पूर्णाक ही होता है। अतः पूर्णाक गुणा के लिए संवरक होते हैं। माना कि a और b दो पूर्णाक हैं तथा उसका गुणनफल ' c ' है तो c भी एक पूर्णाक होगा, क्या आप ऐसे कोई दो पूर्णाक सोच सकते हैं जिनका गुणनफल पूर्णाक न हो?

II. गुणन की क्रमविनिमेयता

इस तथ्य पर विचार करें- इसी प्रकार $5 \times (4) = 20$ $-2 \times 3 = -6$
 $2 \times (-8) = -16$ $4 \times (5) = 20$ $3 \times (-2) = -6$
 $\Rightarrow (-8) \times 2 = 2 \times (-8)$ $\Rightarrow -5 \times (4) = 4 \times (-5)$ $\Rightarrow -2 \times 3 = 3 \times (-2)$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो पूर्णाकों के गुणा में पहले पूर्णाक को दूसरे से गुणा करें या दूसरे को पहले से, गुणनफल बराबर होते हैं। अतः पूर्णाकों का गुणा क्रम विनिमेय गुण का पालन करता है। यदि a और b दो पूर्णाक हैं तो $a \times b = b \times a$ भी सत्य है।

III. गुणन साहचर्य गुण

निम्न पर विचार करें-

$(2 \times 3) \times 4$	$2 \times (3 \times 4)$
$= 6 \times 4$	$= 2 \times 12$
$= 24$	$= 24$

अतः $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

इसी प्रकार-

$-4 \times 5 \times 6$ में	$(-4 \times 5) \times 6$	$-4 \times (5 \times 6)$
	$= -20 \times 6$	$= -4 \times 30$
	$= -120$	$= -120$

अतः $(-4 \times 5) \times 6 = -4 \times (5 \times 6)$

नीचे दिए गए तीन पूर्णाकों का इसी प्रकार समूह बदलकर गुणा कीजिए।

(i) $3 \times -2 \times 4$, (ii) $-3 \times -5 \times 7$

क्या इनका गुणनफल समूह बदलने से बदला?



समग्र शिक्षा 2021-22

व्यापक रूप में किन्हीं तीन पूर्णाकों a, b, c के लिए—

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b, c में प्रत्येक के लिए पाँच मान लीजिए और इस गुण का सत्यापन कीजिए।

अतः पूर्ण संख्याओं की तरह तीन पूर्णाकों का गुणनफल उनके समूह बनाने पर निर्भर नहीं करता है। अर्थात् पहली को दूसरी के साथ गुणा करके तीसरी पूर्णाक के साथ गुणा करें या दूसरे व तीसरे पूर्णाक का गुणा कर पहले पूर्णाक के साथ उनका गुणा करें। गुणनफल समान आता है और यह पूर्णाकों के लिए गुणन का साहचर्य गुण कहलाता है।

व्यापक रूप में, माना कि a, b और c तीन पूर्णाक हैं तो $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ भी सत्य है।

$$\begin{aligned} 4 \times (5 + 8) &= 4 \times 5 + 4 \times 8 \\ &= 4 \times 13 \\ &= 52 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= 4 \times 5 + 4 \times 8 \\ &= 20 + 32 \\ &= 52 \end{aligned}$$

अतः $4 \times (5 + 8) = 4 \times 5 + 4 \times 8$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार, } 4 \times (-5 + 7) &= 4 \times (-5) + 4 \times 7 \\ &= 4 \times 2 \\ &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= 4 \times (-5) + 4 \times 7 \\ &= -20 + 28 \\ &= 8 \end{aligned}$$

अतः $4 \times (-5 + 7) = 4 \times (-5) + 4 \times 7$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार, } 4 \times [5 + (-7)] &= 4 \times 5 + 4 \times (-7) \\ &= 4 \times (5 - 7) \\ &= 4 \times (-2) \\ &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= 4 \times 5 + 4 \times (-7) \\ &= 20 - 28 \\ &= -8 \end{aligned}$$

अतः $4 \times [5 + (-7)] = 4 \times 5 + 4 \times (-7)$

उपर्युक्त तथ्यों से स्पष्ट है कि दो या अधिक पूर्णाकों के योग में किसी अन्य पूर्णाक से गुणा किया जाय तो गुणनफल वही आता है, जो गुणक का पूर्णाकों में अलग-अलग गुणा करने से प्राप्त गुणनफलों का योग होता है।

अतः इस गुण को वितरण नियम (distributive law) कहते हैं। माना कि x और y दो

पूर्णांक हैं, जिसका योगफल $(x + y)$ है, इसके योगफल में a पूर्णांक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल वही आता है जो पूर्णांक a का x और y के साथ अलग-अलग गुणा कर जोड़ने पर आता है— $a(x + y) = ax + ay$

V. गुणन के लिए तत्समक अवयव

निम्न पर गौर करें—

$4 \times 1 = 4$

$(-3) \times 1 = \dots\dots\dots$

$25 \times 1 = \dots\dots\dots$

$-2 \times 1 = -2$

$(4) \times 1 = \dots\dots\dots$

$-32 \times 1 = \dots\dots\dots$

उपर्युक्त सारणी से हम पाते हैं कि किसी पूर्णांक को एक से गुणा करने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है। अतः पूर्णाकों में गुणन के लिए तत्समक अवयव 1 है

VI. निम्न को समझें—

$5 \times (-1) = -5$

$-1 \times (-5) = +5$

$-5 \times (-1) = +5$

$-1 \times 5 = -5$

इस प्रकार किसी पूर्णांक में -1 से गुणा करने पर गुणनफल विपरीत चिह्न का वही पूर्णांक प्राप्त होता है, अर्थात् योगात्मक प्रतिलोम प्राप्त होता है। यदि a कोई पूर्णांक हो, तो $a \times -1 = -a$

तथा $-a \times -1 = a$

VII. निम्न को समझें—

$2 \times 0 = 0$

$25 \times 0 = \dots\dots\dots$

$125 \times 0 = \dots\dots\dots$

$-4 \times 0 = 0$

$37 \times 0 = \dots\dots\dots$

$229 \times 0 = \dots\dots\dots$

अतः किसी पूर्णांक में शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है। माना कि a एक पूर्णांक है, तो $a \times 0 = 0$

VIII. निम्न को समझें—

$8 > 5$

पुनः $8 > 5$

या, $8 \times 2 > 5 \times 2$

$8 \times -2 < 5 \times -2$

यदि a, b तथा c ऐसे पूर्णांक हैं कि $a > b$ तो

(i) $a \times c > b \times c$ यदि $c =$ धनपूर्णांक हो,

(ii) $a \times c < b \times c$ यदि $c =$ ऋणपूर्णांक हो

IX.

(i) $2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = (4 \times 2) \times 3$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = (-2) \times [(-3) \times (-4)] = [(-2) \times (-4)] \times (-3)$

अतः तीन पूर्णाकों का गुणा करने में किन्हीं दो पूर्णाकों के गुणनफल में शेष तीसरे पूर्णांक का गुणा करने से अंतिम गुणनफल वही रहता है।

स्वयं करके देखिए

निम्न गुणों के सामने प्रत्येक का एक उचित उदाहरण दें (गुणा के लिए)

गुण	गुणा के अन्तर्गत	उदाहरण
साहचर्य गुण		
वितरण गुण		
संवरक गुण		
क्रम विनिमय गुण		
तत्समक गुण		

1.9 गुणा को आसान बनाने का तरीका

$20 \times 78 \times 5$ को हल करने के लिए हम इसे दो तरीके से कर सकते हैं—

$$= (20 \times 78) \times 5 = 1560 \times 5 = 7800$$

अथवा, $(20 \times 5) \times 78$

$$100 \times 78 = 7800$$

कौन सी विधि आसान है?

स्पष्ट है कि दूसरी विधि आसान है, क्योंकि 20 को 5 से गुणा करने पर 100 प्राप्त होता है, जिसे 78 से गुणा करना आसान है। ध्यान दीजिए दूसरी विधि में पूर्णाकों की क्रमविनिमेयता और सहचारिता के गुणों को उपयोग किया।

उदाहरण-1.

(i) 28×12

$$\begin{aligned} 28 \times 12 &= 28 \times (10 + 2) \\ &= 28 \times 10 + 28 \times 2 \\ &= 280 + 56 = 336 \end{aligned}$$

(iii) $(-25) \times (-98)$

$$\begin{aligned} &= -25 \times (-100 + 2) \\ &= (-25) \times (-100) + (-25) \times 2 \\ &= 2500 - 50 = 2450 \end{aligned}$$

(ii) -8×48

$$\begin{aligned} &= -8 \times (50 - 2) \\ &= -8 \times 50 + [(-8) \times (-2)] \\ &= -400 + 16 = -384 \end{aligned}$$

(iv) $54 \times (-8) + (-54) \times 2$

$$\begin{aligned} &= -54 \times 8 + (-54) \times 2 \\ &= -54 \times (8 + 2) = -54 \times 10 \\ &= -540 \end{aligned}$$

उपर्युक्त उदाहरणों को देखने से पता चलता है कि गुणा के नियमों/गुणों का उपयोग कर गुणनफल को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

स्वयं करके देखिए

गुणा के नियमों द्वारा निम्नलिखित को सरल करें-

(a) $-50 \times 48 \times 2$

(b) 850×48

(c) -75×52

(d) $-38 \times 2 - 38 \times 8$

शब्द समस्याएँ

दो पूर्णाकों का गुणनफल -30 है यदि उनमें से एक पूर्णांक 15 है तो दूसरी पूर्णांक ज्ञात करें।

यहाँ, एक पूर्णांक = 15

हल :

$$\text{गुणनफल} = -30$$

$$\therefore \text{एक पूर्णांक} \times \text{दूसरा पूर्णांक} = \text{गुणनफल}$$

$$\therefore 15 \times \text{दूसरा पूर्णांक} = -30$$

$$\therefore \text{दूसरा पूर्णांक} = \frac{-30}{15} = -2 \text{ उत्तर।}$$

1. **गुणा कीजिए-**
- | | |
|---|------------------------------------|
| (a) $225 \times (-4)$ | (b) $(-405) \times (-5)$ |
| (c) $(-80) \times (-50)$ | (d) $(-11) \times 15$ |
| (e) $(-3) \times 35 \times (-10)$ | (f) $(-25) \times 0$ |
| (g) $(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)$ | (h) $(-2) \times (-2) \times (-2)$ |
| (i) $(-20) \times (-15) \times (-25) \times (-5)$ | (j) $-50 \times 5 \times (-20)$ |

2. **निम्नलिखित में सत्य और असत्य को चुनें-**
- | | |
|---|---------------------------|
| (i) $18 \times (-2) = (-2) \times 18$ | (ii) $-38 \times 1 = 38$ |
| (iii) $(-20) \times (-5) = (-5) \times (-20)$ | (iv) $43 \times 0 = 43$ |
| (v) $1 \times -425 = -425$ | (vi) $-1 \times 25 = -25$ |
| (vii) $[(-2) \times (-12)] \times -24 = (-2) \times [(-12) \times (-24)]$ | |
| (viii) $(-5) \times (2 + 3) = (-5) \times 2 + (-5) \times 3$ | |

3. **निम्नलिखित के सामने उसके उचित गुण को लिखिए-**
- | | |
|--|---------------------------|
| (i) $-25 \times (8 + 2) = (-25) \times 8 + (-25) \times 2$ | (iv) $-2 \times -10 = 20$ |
| (ii) $(-8) \times (-4) = (-4) \times (-8)$ | (v) $-5 \times 1 = -5$ |
| (iii) $(20 \times 30) \times 40 = 20 \times (30 \times 40)$ | |

4. **सत्यापित करें-**
- | |
|---|
| (i) $42 \times (-5) = -5 \times 42$ |
| (ii) $25 \times (28 + 2) = 25 \times 28 + 25 \times 2$ |
| (iii) $(50 \times 60) \times 70 = 50 \times (60 \times 70)$ |
| (iv) $(-24) \times (5 \times 2) = (-24 \times 5) \times 2$ |

5. **किस पूर्णांक में (-1) का गुणा करने पर गुणफल निम्न प्राप्त होता है-**
- | | | | | |
|--------|----------|---------|--------|---------|
| (i) 20 | (ii) -45 | (iii) 0 | (iv) 1 | (v) -50 |
|--------|----------|---------|--------|---------|

6. $-4 \times 0 = 0$ के आधार पर सत्यापित कीजिए कि दो ऋण पूर्णाकों का गुणफल धनात्मक पूर्णाक होता है।
- (सकत $-4 \times (2 + (-2)) = 0$ या $-4 \times [2 + (-2)] = -4 \times 2 + (-4) \times (-2) = -8 + (-4) \times (-2)$)



इसका मान शून्य तभी होगा जब $(-4) \times (-2) = +8$

∴ दो ऋणात्मक पूर्णाकों का गुणनफल धन पूर्णाक होता है।

7. सरल कीजिए (विभिन्न गुणों का उपयोग करते हुए)

(i) $(-7) \times 5 + (-7) \times 11$

(ii) $675 \times (-5) - 5 \times (-675)$

(iii) $8 \times (50 - 4)$

(iv) $5 \times 27 \times (-4)$

(v) 987×98

(vi) $-57 \times (-19) + 57$

8. निम्नलिखित सारणी को पूरा करें-

x	0	-1	-2	-3	4	6
-2						
-3						
-4						
-1						
5						

9. निम्नलिखित में से कौन सत्य है और कौन असत्य?

(i) -20 का योज्य प्रतिलोम 20 है। ()

(ii) किसी पूर्णाक का योज्य प्रतिलोम प्राप्त करने के लिए उसमें शून्य से गुणा करते हैं। ()

(iii) 5 ऋण पूर्णाकों का गुणनफल धन पूर्णाक होता है। ()

(iv) चार ऋण पूर्णाकों का गुणनफल धन पूर्णाक होता है। ()

(v) $-4 \times 1 = -4$ ()

(vi) $-5 \times 0 = 0$ ()

10. निम्नलिखित में पूर्णाकों के गुणा में सही कथनों के आगे सही का निशान लगाएँ तथा गलत कथनों को ठीक करके लिखें।

(i) $(+2) \times (-3) = -6$ () (ii) $(-4) \times (+8) = +32$ ()

(iii) $(-2) \times (-2) = +4$ () (iv) $(+3) \times (+4) = -12$ ()

11. किसी हिमीकरण (ठंडा) प्रक्रिया में, कमरे के तापमान को 40°C से 5°C प्रति घंटे की दर से कम करने की आवश्यकता है। उस प्रक्रिया के शुरू होने के 10 घंटे बाद कमरे का तापमान क्या होगा?
12. दस प्रश्नोंवाले एक कक्षा टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं एवं प्रयत्न नहीं किये गये प्रश्नों के लिए शून्य दिया जाता है।
- (i) मोहन चार प्रश्नों का सही और छह प्रश्नों का गलत उत्तर देता है, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?
- (ii) रेशमा के पाँच उत्तर सही हैं और पाँच उत्तर गलत हैं, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं? <https://www.evidyarthi.in/>
- (iii) हीना ने कुल सात प्रश्न किए हैं, उनमें से दो का उत्तर सही है और पाँच का उत्तर गलत है। तो उसे कितने अंक प्राप्त होते हैं?
13. एक सीमेंट कंपनी को सफेद सीमेंट बेचने पर 8 रुपये प्रति बोरी की दर से लाभ होता है और (Grey) स्लेटी रंग की सीमेंट बेचने पर 5 रुपये प्रति बोरी की दर से हानि होती है।
- (a) किसी महीने में वह कंपनी 3000 बोरियाँ सफेद सीमेंट की और 5000 बोरियाँ स्लेटी सीमेंट का बेचता है। उसका लाभ अथवा हानि क्या है?
- (b) यदि बेची गई सफेदी सीमेंट की बोरियों की संख्या 6400 है तो, कम्पनी की स्लेटी सीमेंट की कितनी बोरियाँ बेचनी चाहिए, ताकि उसे ना तो लाभ हो और ना हो हानि?
14. एक विद्युत कम्पनी प्रत्येक रंगीन टी०वी० पर 80 रुपये का लाभ कमाता है और प्रत्येक रेफ्रिजरेटर पर 60 रुपये का हानि होता है।
- (a) कम्पनी 5000 रंगीन टी०वी० और 4000 रेफ्रिजरेटर एक महीना में बेचता है। तो कम्पनी को कितना लाभ या हानि होता है ?
- (b) कम्पनी द्वारा 4000 रेफ्रिजरेटर बेचने पर कम्पनी कितना रंगीन टी० वी० बेचे कि उसे न लाभ हो और न हानि?

1.10 पूर्णाकों में भाग संक्रिया (Division Operation in Integers)

हम जानते हैं कि भाग, गुणा की विपरीत प्रक्रिया है, जैसे $4 \times 7 = 28$ है, इसलिए $28 \div 4 = 7$ तथा $28 \div 7 = 4$ है।

इसी प्रकार $5 \times 4 = 20$ और $20 \div 5 = 4$ एवं $20 \div 4 = 5$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन या भाग, कथन होते हैं।

क्या आप पूर्णाकों के लिए गुणन कथन एवं संगत भाग कथनों को लिख सकते हैं?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए।

गुणन कथन	संगत भाग कथन	
	I	II
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (9) = 72$	$72 \div \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$72 \div \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
$(-3) \times (7) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}} \div (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
$(-8) \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
$5 \times (-9) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
$(-10) \times (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि—

$$(-12) \div 2 = (-6)$$

$$(-20) \div (5) = (-4)$$

$$(-32) \div 4 = -8$$

$$(-45) \div 5 = 9$$

हम देखते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और इसके पश्चात् भागफल से पहले ऋण चिह्न (-) रख देते हैं। इस प्रकार, हम एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त करते हैं।

हम यह भी देखते हैं कि—

$$72 \div (-8) = -9$$

$$\text{और } 50 \div (-10) = -5$$

$$72 \div (-9) = -8$$

$$50 \div (-5) = -10$$



समग्र शिक्षा 2021-22

इस प्रकार, हम यह कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल के सामने ऋण चिह्न (-) रख देते हैं। इस प्रकार, हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में,

$$(+a) \div (+b) = +\frac{a}{b}, (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b}, (+a) \div (-b) = -\frac{a}{b}, (-a) \div (+b) = -\frac{a}{b}$$

स्वयं कीजिए

(a) $-50 \div 10$

(b) $-56 \div 7$

(c) $85 \div (-5)$

(d) $90 \div (-3)$

(e) $-100 \div 20$

किसी टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए +6 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं। (i) रेखा ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और 36 अंक प्राप्त किए जबकि उसके 12 उत्तर सही पाए गये। (ii) पवन ने भी सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और उसने -12 अंक प्राप्त किए, जबकि उसके पाँच उत्तर सही पाए गये। प्रत्येक ने कितने प्रश्नों के उत्तर गलत दिए?

(i) एक सही उत्तर के लिए दिए गये अंक = 6

हल : अतः 12 सही उत्तरों के लिए दिए गये अंक = $6 \times 12 = 72$

रेखा के द्वारा प्राप्त किये गये अंक = 36

गलत उत्तरों के लिए प्राप्त अंक = $36 - 72 = -36$

(-2) अंक मिलता है एक गलत उत्तर पर

इसलिए (-36) अंक मिलेगा $-36 \div (-2) = 18$ गलत उत्तरों पर

∴ गलत उत्तरों की संख्या = 18

(ii) पाँच सही उत्तरों के लिए दिए गये अंक = $5 \times 6 = 30$

पवन द्वारा प्राप्त किये गये अंक = -12

गलत उत्तरों के लिए प्राप्त अंक = $-12 - 30 = -42$

∴ -2 अंक मिलता है एक गलत उत्तर पर

∴ -42 अंक मिलेगा $-42 \div (-2) = 21$ गलत उत्तर पर

∴ गलत उत्तरों की संख्या = 21



1.11 भाग संक्रिया के गुण (Properties of Division Operation)

निम्नलिखित पर विचार करें-

I. $-6 \div (-2) = 3$, पूर्णांक संख्या है $6 \div (-2) = -3$ एक पूर्णांक है

परन्तु $-2 \div (-6) = \frac{-2}{-6}$, पूर्णांक संख्या नहीं है।

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि किन्हीं दो पूर्णाकों का भागफल एक पूर्णांक हो भी सकता है और नहीं भी।

II. $-12 \div (-4) = 3$ $-4 \div (-12) = \frac{-4}{-12}$

$\Rightarrow -12 \div (-4) \neq -4 \div (-12)$

अतः भाग में क्रम विनिमेय गुण नहीं है।

III. $-4 \div 0 =$ अपरिभाषित $5 \div 0 =$ अपरिभाषित

अतः किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग करना अर्थहीन है। परन्तु $0 \div (-4) = 0$;
 $0 \div 5 = 0$

अतः शून्य में किसी भी पूर्णांक (शून्य को छोड़कर) से भाग करने पर भागफल शून्य होता है।

इसे एक उदाहरण लेकर समझा जा सकता है, जैसे $-0 \div 4 = ?$

हम जानते हैं, $0 \div 4 = \frac{0}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

IV. निम्नलिखित को समझें-

$-10 \div 1 = -10$

$+5 \div 1 = 5$

यह दर्शाता है कि किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।
क्या (-1) से भाग देने पर भी वही पूर्णांक प्राप्त होगा।

माना कि पूर्णांक a है, तो $a \div 1 = a$

V. $(-4) \div (-1) = 4$ $= 4 \div (-1) = -4$

अतः किसी भी पूर्णांक में (-1) से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

- V. क्या हम कह सकते हैं $[(-8) \div (-4)] \div (-2)$ एवं $(-8) \div [(-4) \div (-2)]$ बराबर हैं? हम जानते हैं कि $[(-8) \div (-4)] \div (-2) = 2 \div -2 = -1$ और $(-8) \div [(-4) \div (-2)] = (-8) \div 2 = -4$ अतः $[(-8) \div (-4)] \div (-2) \neq (-8) \div [(-4) \div (-2)]$ क्या आप कह सकते हैं कि पूर्णाकों के लिए भाग साहचर्य है, नहीं। अपनी ओर से पाँच अन्य उदाहरण लेकर इसे सत्यापित कीजिए।

स्वयं करके देखिए

क्या भाग में संवरक, तत्समक, क्रम विनिमेय साहचर्य नियम लागू है? एक-एक उदाहरण द्वारा समझाएँ।

प्रश्नावली- 1.3

1. हल कीजिए-

- (i) $(-40) \div 5$ (ii) $(-450) \div 3$ (iii) $(-45) \div (-5)$
 (iv) $(-56) \div (-4)$ (v) $25 \div 5$ (vi) $(-128) \div (-16)$
 (vii) $0 \div 50$ (viii) $50 \div 0$ (ix) $(-80) \div (-80)$

2. निम्नलिखित गुणा की क्रिया को भाग की दो प्रक्रिया में बदलिए-

- (i) $5 \times 8 = 40$ (ii) $-4 \times (-6) = 24$
 (iii) $-12 \times 9 = -108$ (iv) $-4 \times (-12) = 48$
 (v) $-10 \times 8 = -80$

3. खाली जगह में उपयुक्त पूर्णांक भरिए-

- (i) $\square \div (-8) = (-12)$ (ii) $\square \div 8 = (-9)$
 (iii) $24 \div \square = -4$ (iv) $-80 \div \square = 10$
 (v) $-48 \div 6 = \square$

4. निम्नलिखित में 2×2 का अर्थ क्या है। हल कीजिए: $4 \div 6$

(iii) $-25 \div 0 = 0$

(iv) $0 \div 5 = 0$

(v) $-125 \div 1 = -125$

(vi) $-45 \div (-45) = 1$

5. दोपहर 12 बजे तापमान शून्य से 10°C ऊपर था। यदि यह आधी रात तक 2°C प्रति घंटे की दर से कम होता है, तो किस समय तापमान शून्य से 8°C नीचे होगा? रात के 12 बजे तापमान क्या होगा?

6. एक उत्थापक (lift) किसी खान कूपक में 6m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। यदि नीचे जाना भूमि तल से 10m ऊपर से शुरू होता है, तो -350m पहुँचने में कितना समय लगेगा?

1.2 कई संक्रियाओं युक्त व्यंजकों का सरलीकरण

$8 + 20 \div 25$ का $\frac{1}{5} \times 10 - 4$

उदाहरण 4.

$8 + 20 \div 25$ का $\frac{1}{5} \times 10 - 4$

हल:

$= 8 + 20 \div 5 \times 10 - 4$

$= 8 + 4 \times 10 - 4$

$= 8 + 40 - 4$

$= 48 - 4 = 44$

सबसे पहले "का" को हल करते हैं।
 - तत्पश्चात् \div फिर \times की क्रिया करते हैं।
 - $+$ तथा $-$ की क्रिया में पहले धनात्मक संख्या को एक साथ और ऋणात्मक संख्या को एक साथ जोड़कर घटा देते हैं और चिह्न बड़ी संख्या वाली लगा देते हैं। (चिह्न रहित बड़ी संख्या)

240 का -

उदाहरण 5.

का $\frac{1}{7} =$ का

(अर्थ है का गुणा)

अर्थात् $40 \times 5 = 200$.



उदाहरण 6. $350 \div \frac{7}{5}$

हल : $350 \div \frac{7}{5} = 350 \times \frac{5}{7} = 50 \times 5 = 250$

याद रखें

कई संक्रियाओं के सरलीकरण का क्रम

के लिए इन्हें याद रखें -

पहले "का" कर, पीछे (\div) भाग ।

तब गुणा तब जोड़-घटाव ॥

कार्य विधि-

भाग को गुणा में बदलकर भाग के बाद आने वाली संख्या (भिन्न) को उलट देते हैं, फिर गुणा की क्रिया करते हैं। गुणा की क्रिया में अंश और हर को किसी उभयनिष्ठ संख्या, जिससे अंश और हर पूरी तरह विभाजित होता हो, उस संख्या से भाग देकर उस संख्या के ऊपर या नीचे भागफल को लिखते हैं, जैसा कि उदाहरण से स्पष्ट है।

1.13 कोष्ठकों का प्रयोग (Use of brackets) : आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें-

उदाहरण 7. कुछ टॉफियों को 5 लड़के और 3 लड़कियों में बराबर-बराबर इस प्रकार बाँटना है कि प्रत्येक को 10 टॉफी मिले तो बताएँ कुल कितनी टॉफियां है?

हल : इसका हल दो लड़कों ने दो भिन्न तरीकों से निकाला-

$\begin{aligned} \text{कुल टॉफी} &= 5 \times 10 + 3 \times 10 \\ &= 50 + 30 \\ &= 80 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{कुल टॉफी} &= 10 \times (5 + 3) \\ &= 10 \times 8 \\ &= 80 \end{aligned}$
---	---

अतः उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि समस्याओं को हल करने में कोष्ठक का उपयोग किया जाता है, जिससे समस्या का समाधान करना आसान हो जाता है।

कोष्ठक (Bracket) निम्न प्रकार के हैं-

- (i) **रेखा कोष्ठक (line bracket) :** इसे सरल रेखा द्वारा व्यंजक के ऊपर लगाते हैं, जिसका हल पहले करना है। जैसे $-3 + 4 - 2 + (2 - 3 + 4)$ में $2 - 3$ को पहले हल करना है।
 - (ii) **छोटा कोष्ठक (Small bracket या Parenthesis) :** इसका चिह्न " $()$ " जैसे $-2 + 3 \times (4 - 2)$ इसमें $4 - 2$ को पहले हल करना है।
 - (iii) **मंडला कोष्ठक (Curly bracket या Braces) :** इसका चिह्न " $\{ \}$ " है।
 - (iv) **बड़ा कोष्ठक (Big bracket या Square bracket) :** इसका चिह्न " $[]$ " है।
- कोष्ठकों के तोड़ने अर्थात् व्यंजकों के सरलीकरण का क्रम इस प्रकार है-पहले

रेखा-कोष्ठक, तब छोटा कोष्ठक, पुनः मँझला कोष्ठक और अंत में बड़े कोष्ठक को तोड़ते हैं। अर्थात् कोष्ठक के अन्दर के व्यंजकों को सरलीकरण करते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण पर गौर करें-

उदाहरण-8. $(14 \div 7) \times [8 + \{3 + \overline{8-2}\}] - (5 - 2)$

हल : $(14 \div 7) \times [8 + \{3 + \overline{8-2}\}] - (5 - 2)$

$$= \left(14 \times \frac{1}{7}\right) \times [8 + \{3 + 6\}] - 3$$

$$= 2 \times [8 + 9] - 3$$

$$= 2 \times 17 - 3$$

$$= 34 - 3 = 31$$

उपर्युक्त उदाहरण के हल से स्पष्ट होता है कि-

- (i) सबसे पहले रेखा कोष्ठक के भीतर की संक्रिया करते हैं।
- (ii) उसके बाद छोटा कोष्ठक का
- (iii) तत्पश्चात् मँझला कोष्ठक का और
- (iv) अंत में बड़ा कोष्ठक के भीतर की संक्रिया करते हैं।

हमें कोष्ठक को तोड़ते या हटाते समय निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान देना चाहिए-

- (i) यदि किसी कोष्ठक के पहले संख्यांक है तो इसका अर्थ है कि कोष्ठक के भीतर की प्रत्येक संख्या से गुणा करना। <https://www.evidyarthi.in/>
- (ii) यदि कोष्ठक के पहले ऋण (-) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न बदल जाता है। (सिर्फ + और - चिह्न) [जैसे : $-(8-2) = -8+2$]
- (iii) यदि कोष्ठक के बाहर धन (+) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं होता है।
- (iv) कोष्ठक के बाहर यदि कोई चिह्न न हो तो गुणा का चिह्न (x) समझा जाता है।
- (v) यदि एक ही कोष्ठक के अन्दर कोई चिह्नयुक्त संख्या (पद) हो तो संक्रिया में इस क्रम ("का", \div , \times , $+$, $-$) का पालन करें।

इसे सहजता से याद रखने के लिये BODMAS के अक्षरों का क्रम याद रखें। अर्थात्

B	→	Bracket (कोष्ठक)
O	→	Of (का)
D	→	Division (भाग)
M	→	Multiplication (गुणा)
A	→	Addition (जोड़)
S	→	Subtraction (घटाव)

कोष्ठक लगाने का नियम-

- यदि कोष्ठक के बाहर ऋण (-) चिह्न रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर डाले जानेवाले प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न (+ और -) बदलकर रखते हैं। जैसे : $-12+4-2+5 = -(12-4+2-5)$
- यदि कोष्ठक के बाहर धन (+) चिह्न रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर डाले जानेवाले किसी भी संख्या (पद) का चिह्न नहीं बदलता है। जैसे : $-12+4-2+5 = +(-12+4-2+5)$

उदाहरण-9. मनीष अपने पिता से 60 रुपये माता से 30 रुपये लेकर बाजार गया। इन रुपयों में से 50 रुपये का उसने कपड़ा खरीदा। बचे हुए धन के 5वें भाग से एक पुस्तक खरीदा। उक्त विवरण को कोष्ठकों की सहायता से गणितीय रूप में लिखिए तथा बताइए कि मनीष ने कितने रुपये की पुस्तक खरीदी ?

हल : $[(60 + 30) - 50] \div 5$ (उक्त विवरण का गणितीय रूप)

$$= [90 - 50] \div 5$$

$$= 40 \div 5$$

$$= 40 \times \frac{1}{5} = 8$$

अतः मनीष ने 8 रुपये की पुस्तक खरीदी।

प्रश्नावली-1.4

1. सरल कीजिए-

- (i) 20 का $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{250}{9}$ का $\frac{3}{50}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{20}{8}$
- (iv) $\frac{12}{7} \div \frac{9}{35}$ (v) $\frac{75}{18} \times \frac{60}{36}$
- (vi) 20 का $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \div \frac{1}{8} + 10 - 15$ (vii) $20 - (8 + 5)$
- (viii) $16 \div (15 - 8 - 3) + 4$ (ix) $14 \div \{ 3 \text{ का } 2 - (5 - 6) \} + 9$
- (x) $(30 - 5 \times 6 + 2) \div 2$

2. कोष्ठकों का प्रयोग कर निम्नलिखित प्रश्नों को गणितीय रूप दीजिए-

- (i) 5 और 15 के योग में 18 से भाग देना।
- (ii) 69 में 4 और 6 के गुणनफल से 1 कम का भाग देना।
- (iii) राहुल ने अपनी 24 पेंसिलों में से 4 को अपने पास रखकर शेष को अपने 5 साथियों में बराबर-बराबर बाँट दिया। प्रत्येक साथी को कितनी पेंसिलें मिली ?
- (iv) 25 तथा 5 के योग से 1 अधिक का 124 में भाग देना।
- (v) 2 तथा 4 के गुणनफल से 2 कम का 9 से गुणा कर गुणनफल में 6 से भाग देना।

3. सरल कीजिए-

- (i) $50 + \{15 - 5 + (8 - 2)\}$ (ii) $8 [6 + 2 \{5 - 4 (5 - 8)\}]$
- (iii) $12 \div \overline{6 - 2} + 10$ (iv) $15 + [2 - 3 - \{2(5 - 4 + 1)\}]$
- (v) $103 - [144 \div (12 \times 12) + 5 + 12 \div \overline{6 - 2} + 10]$
- (vi) $5 [5 - \{5 - (5 - 5 - 5)\}]$
- (vii) $15 - (-3)(4 - 4) \div \{5 + (-6) \times (-3)\}$
- (viii) $(-6) + (-6) \div 2 - [(-5) \times (-1) - 2(4 - 2)]$
- (ix) $25 + \left[20 - \left\{ 2 - \left(20 \text{ का } \frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} - 8 \right) \right\} \right]$

हमने सीखा

1. पूर्णांक संख्याएँ – जब पूर्ण संख्या के परिवार में ऋणात्मक संख्या शामिल हो जाती है तो इस संख्या परिवार को पूर्णांक संख्याएँ कहते हैं। जैसे :-, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,
2. दो विपरीत गुणों को दर्शाने के लिए पूर्णांक का उपयोग किया जाता है, जैसे- ऊँचाई-गहराई, लाभ-हानि, ठण्डा-गर्म आदि।
3. दो धनात्मक पूर्णाकों को जोड़ने पर धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक पूर्णाकों को जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। यदि दो पूर्णांक विपरीत चिह्न के होते तो वे घट जाते हैं तथा जिसका परिमाण बड़ा होता है उसका चिह्न बच जाता है।
4. अब हमने जोड़ एवं घटा द्वारा संतुष्ट होनेवाले गुणों का अध्ययन किया है।
 - (अ) पूर्णांक जोड़ एवं घटा दोनों के लिए संवरक है। अर्थात् $a + b$ और $a - b$ दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक हैं।
 - (ब) पूर्णाकों के लिए योग क्रम विनिमेय हैं, अर्थात् सभी पूर्णाकों a तथा b के लिए $a + b = b + a$, परन्तु घटाव के लिए नहीं है अर्थात् $a - b \neq b - a$
 - (स) पूर्णाकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णाकों a , b तथा c के लिए $(a+b)c = a + (b+c)$ होता है। परन्तु घटाव के लिए साहचर्य नहीं है अर्थात् $(a-b)-c = a-(b-c)$
 - (द) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $a + 0 = 0 + a = a$ होता है।
5. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि दो ऋणात्मक पूर्णाकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।
उदाहरण: $-2 \times 7 = -14$ और $-3 \times -8 = 24$ है।
6. एक से अधिक ऋण पूर्णाकों के गुणन की दशा में यदि ऋणात्मक पूर्णाकों की संख्या सम होने पर उनका गुणनफल धनात्मक होता है जबकि यह संख्या विषम होने पर उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है।
7. पूर्णांक गुणन के अंतर्गत कुछ गुणों को दर्शाते हैं।
 - (अ) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक संवृत होते हैं, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णाकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

- (ब) पूर्णाकों के लिए गुणन क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णाकों a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ होता है।
- (स) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $1 \times a = a \times 1 = a$ होता है।
- (द) पूर्णाकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णाकों a, b तथा c के लिए $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।
8. योग एवं गुणन के अंतर्गत पूर्णांक वितरण गुण का पालन करते हैं। अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णाकों a, b तथा c के लिए $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।
9. योग एवं गुणन के अंतर्गत क्रम विनिमेयता, सहचारिता और वितरणता के गुण हमारे परिकलन को आसान बनाते हैं।
10. (अ) किन्हीं दो पूर्णाकों का भागफल एक पूर्णांक हो भी सकता है और नहीं भी।
 (ब) जब एक धनात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है तो प्राप्त भागफल धनात्मक होता है।
 (स) जब एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है या जब एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो प्राप्त भागफल एक ऋणात्मक होता है।
 (द) एक ऋणात्मक पूर्णांक को दूसरे ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त भागफल एक धनात्मक होता है।
11. (अ) भाग में क्रम विनिमेय गुण नहीं होता है।
 (ब) शून्य में किसी भी पूर्णांक (शून्य को छोड़कर) से भाग देने पर भागफल शून्य होता है तथा किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग देना अर्थहीन है। अपरिभाषित है।
 (स) किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।
 जैसे $5 \div 1 = 5, 4 \div 1 = 4$ अर्थात् $a \div 1 = a$ जहाँ a कोई एक पूर्णांक है।
 (द) किसी भी पूर्णांक में (-1) से भाग करने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।
 जैसे: $5 \div (-1) = -5$, तथा $6 \div (-1) = -6$
 (य) पूर्णांक भाग के लिए साहचर्य गुण प्रदर्शित नहीं करते हैं।