पाठ 13
वृत्त

आइए सीखें

- चक्रीय बिन्दु
- चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों की पहचान।
- किसी चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण की पहचान।
- वृत्त से संबंधित निम्नांकित गुणों का सत्यापन :
    - चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण एक-दूसरे के पूरक होते हैं।
    - किसी जीवा पर वृत्त के केन्द्र से डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।
    - जीवा के मध्य बिन्दु और केन्द्र को मिलाने वाली रेखा उस पर लम्ब होती है।
    - समान जीवा केन्द्र पर समान कोण अंतरित करती है और इसका विलोम।
    - किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण से दुगुना होता है।

उज्जैन के खगोलशास्त्री ब्रह्मगुप्त (598 ई.) ने 'ब्रह्मस्फुट सिद्धांत' की रचना की थी जो पुरानी खगोलीय पुस्तक ''ब्रह्म सिद्धांत'' का संशोधित एवं परिवर्धित रूप था। उनकी अन्य पुस्तक है ''कर्ण खंडखाद्यक' दोनों पुस्तकें मुख्यत: खगोलशास्त्र से संबंधित हैं, परन्तु अधिकांश भाग गणित को समर्पित है। वह अंकीय विश्लेषण के जनक कहे जा सकते हैं। उन्होंने बीजगणित तथा ज्यामिति में मौलिक योगदान दिया है।

ज्यामिति एवं बीजगणित में ब्रह्मगुप्त का योगदान ब्रह्मगुप्त के चक्रीय चतुर्भुज, जिन चतुर्भुजों के चारों शीर्ष बिन्दु वृत्त की परिधि पर स्थित होते हैं, उन्हें चक्रीय चतुर्भुज कहा जाता है। ब्रह्मगुप्त का ज्यामिति में सर्वाधिक महत्वपूर्ण योगदान चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्र में है। अपनी विख्यात पुस्तक ब्रह्मस्फुट सिद्धांत में चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिये सही सूत्र बताने वाले वह विश्व के पहले गणितज्ञ माने जाते हैं।

इसी प्रकार चक्रीय चतुर्भुज के कर्णों को ज्ञात करने के समीकरण भारतीय ज्यामिति में अद्वितीय है।

ब्रह्मगुप्त का एक अन्य योगदान है ऐसे चक्रीय चतुर्भुज की रचना जिसकी भुजाओं, कर्णों तथा क्षेत्रफल का मान पूर्णांक हो तथा उसके कर्ण एक-दूसरे को लम्बवत् काटते हों, ऐसा चक्रीय चतुर्भुज **'ब्रह्मगुप्त चतुर्भुज'** कहलाता है।

उनकी पुस्तक 'ब्रह्मस्फुट सिद्धांत' के अरबी अनुवाद के माध्यम से पहले अरब और बाद में यूरोप, भारत के खगोलशास्त्र एवं गणित से परिचित हुए। महान गणितज्ञ भास्कर ने उन्हें 'गणक चक्र चूड़ामणि' उपाधि से विभूषित किया।

ब्रह्मगुप्त के अनुसार चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल

भुजयोगार्ध चतुष्टय भुजोनघातात् पदं सूक्ष्मम्॥

(ब्रह्म स्फुट सिद्धांत अध्याय 12, श्लोक 21)

अर्थ : भुजाओं के योग का आधा अर्थात् अर्ध परिमाप में से प्रत्येक भुजा क्रमशः घटा कर उन चारों अंतरों के गुणनफल के वर्गमूल करने पर चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त होता है। यदि चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ क्रमशः a, b, c एवं d हैं।

तब $2s = a + b + c + d$

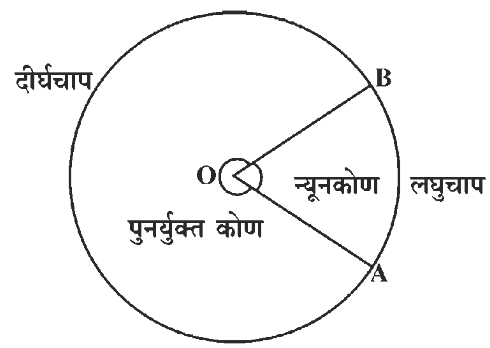
$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

यदि $d = 0$ हो तो यह त्रिभुज का क्षेत्रफल हो जाएगा जो कि हम $\Delta = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}$ सूत्र द्वारा हल अभी कक्षाओं में करते हैं। ध्यान दें कि प्रत्येक त्रिभुज चक्रीय त्रिभुज होता है। इस प्रकार उपरोक्त सूत्र सभी त्रिभुजों के लिए उपयोगी होता है।

13.1 किसी चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित कोण

आकृति 13.1 को देखिए। इसमें एक वृत्त है जिसका केंद्र O है। वृत्त पर दो बिन्दु A और B हैं जो वृत्त को दो भागों में विभाजित करते हैं। OA एवं OB वृत्त की त्रिज्याएँ हैं। ∠AOB का शीर्ष O वृत्त के केंद्र पर है। ऐसे कोण को वृत्त का केंद्रीय कोण कहते हैं।



आकृति 13.1

यदि किसी कोण का शीर्ष किसी वृत्त के केंद्र पर होता है,
तो उसे वृत्त का केंद्रीय कोण कहते हैं।

आकृति 13.1 में बिन्दु A, B द्वारा वृत्त, दो चापों, एक लघु चाप AB तथा दूसरा दीर्घ चाप AB में विभाजित है जिनके द्वारा क्रमशः एक न्यून कोण ∠AOB तथा दूसरा पुनर्युक्त कोण ∠AOB केंद्रीय कोण बन रहे हैं। ये दोनों कोण ∠AOB उक्त चापों द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण भी कहलाते हैं।

संदर्भ (1) ब्रह्म स्फुट सिद्धांत अध्याय 12, श्लोक 21, ब्रह्मगुप्त 628 ई.
(2) दि हिस्ट्री आफ मेथेमेटिक्स एंड मेथेमेटिशयन्स आफ इंडिया (पृष्ठ 81) इंजी. वेणुगोपाल डी. हेरूर गुलबरगा बेंगलोर।

किसी वृत्त में त्रिज्याओं द्वारा बना केंद्रीय कोण त्रिज्याओं के मध्य चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर आंतरित कोण भी कहलाता है।

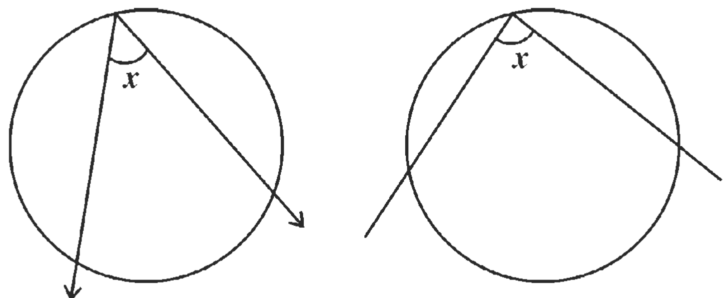
क्रियाकलाप 1. एक कागज पर अलग-अलग चार वृत्त बनाइए। इनके केन्द्रों को अलग-अलग अक्षरों से दर्शाइए। वृत्तों पर दो-दो बिन्दुओं को भिन्न अक्षरों से दर्शाइए। फिर इन सभी चारों वृत्तों में बनने वाले चापों द्वारा उनके केंद्रों पर अन्तरित होने वाले कोणों को बनाकर उनके नाम लिखिए।

13.2 अंतर्गत कोण :

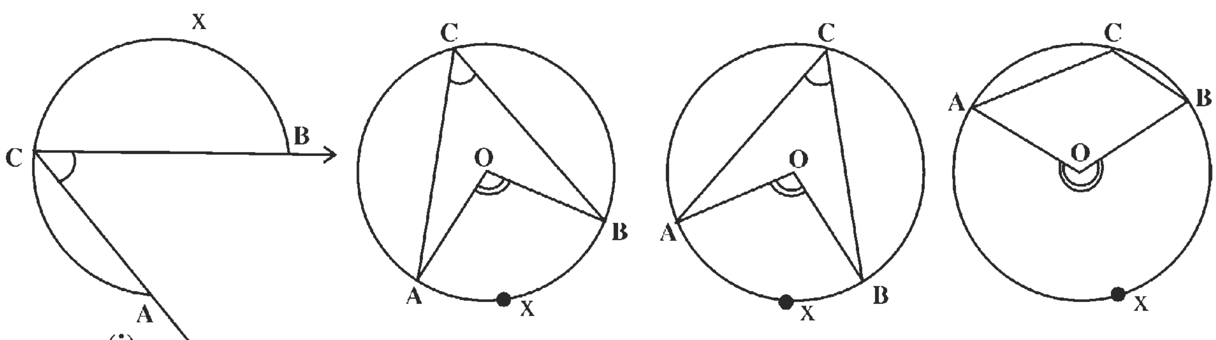
आकृति 13.2 (i) व (ii) में $\angle x$ को वृत्त का अंतर्गत कोण कहते हैं। ध्यान दीजिए कि $\angle x$ का शीर्ष बिन्दु वृत्त पर है तथा इसकी प्रत्येक भुजा वृत्त को दो बिंदुओं पर काटती है।

परिभाषा : कोई कोण वृत्त का अंतर्गत कोण कहलायेगा यदि (i) इसका शीर्ष वृत्त पर हो (ii) इसकी प्रत्येक भुजा वृत्त को दो स्पष्ट बिंदुओं पर काटे।

आकृति 13.3 में $\overparen{AXB}$, किसी वृत्त का चाप है तथा $\angle ACB$ इसका अंतर्गत कोण है।

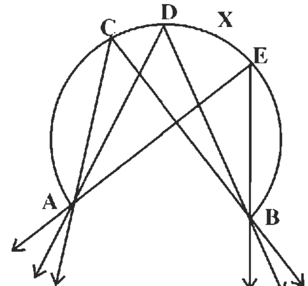


आकृति 13.2



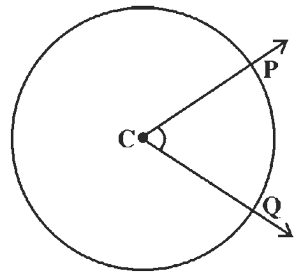
आकृति 13.3

इस प्रकार भी कहते हैं : $\angle ACB$, चाप AXB (या $\overparen{ACB}$) का अंतर्गत कोण है। ध्यान रहे कि एक ही चाप में कई अंतर्गत कोण हो सकते हैं। उदाहरण के लिए आकृति 13.4 में $\angle ACB$, $\angle ADB$ तथा $\angle AEB$ तीनों एक ही चाप AXB के अंतर्गत है।



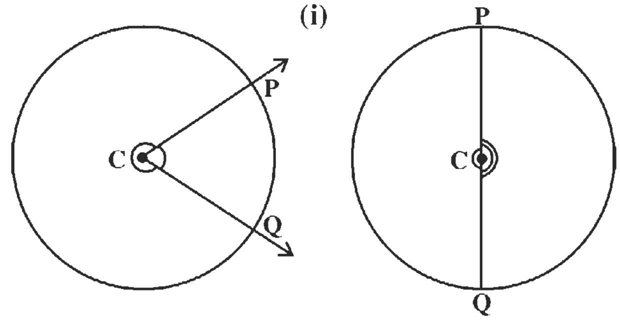
आकृति 13.4

13.3 वृत्त के चाप की अंश माप :



आकृति 13.5 (i) देखिए। इसमें लघु चाप PQ का केंद्रीय कोण $\angle PCQ$ है। इस केंद्रीय कोण की माप को हम लघु चाप PQ की अंश माप कहते हैं। इसे संकेत में $m\overset{\frown}{PQ}$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

इसी प्रकार आकृति 13.5 (ii) में दीर्घ चाप PQ द्वारा पुनर्युक्त दीर्घ कोण $\angle PCQ$ बना है। इस दीर्घ चाप PQ की अंश माप $360^0 - m\overset{\frown}{PQ}$ है। इसमें $m\overset{\frown}{PQ}$ लघु चाप PQ की अंश माप है।



आकृति 13.5

अब आकृति 13.5 (iii) का अवलोकन कीजिए। बताइए इस आकृति में अर्द्धवृत्त PQ की अंश माप क्या है? स्पष्ट है कि अर्द्धवृत्त की अंश माप 180^0 होती हैं। मापन कर इसका सत्यापन भी कीजिए।

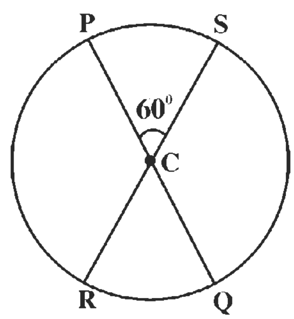
उपर्युक्त के आधार पर सम्पूर्ण वृत्त की अंश माप क्या होनी चाहिए? संपूर्ण वृत्त की अंश माप निश्चित ही 360^0 होगी।

वृत्त के चाप की अंश माप को चाप की माप भी कहते हैं।

उदाहरण 1. एक वृत्त के दो व्यास PQ और RS केन्द्र C पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 13.6)। यदि $m\overset{\frown}{PS} = 60^0$ हो, तो $m\overset{\frown}{RQ}$, $m\overset{\frown}{QS}$ एवं $m\overset{\frown}{PR}$ के मान बताइए।

हल : $\angle PCS = 60^0$ (क्योंकि $m\overset{\frown}{PS} = 60^0$ दिया हुआ है।)

$\angle RCQ = 60^0$ (क्योंकि $\angle PCS$ एवं $\angle RCQ$, PQ व RS के प्रतिच्छेदन बिन्दु C पर बने सम्मुख कोण हैं।)



आकृति 13.6

इसी प्रकार, $\angle QCS = \angle PCR = 180^0 - 60^0 = 120^0$

(क्योंकि SC, PQ से बिन्दु C पर मिलकर $\angle PCS$ एवं $\angle QCS$ आसन्न कोण बनाती है।)

इस प्रकार ज्ञात किए गए केंद्रीय कोणों $\angle RCQ$, $\angle QCS$ व $\angle PCR$ के आधार पर $m\overset{\frown}{RQ} = 60^0$, $m\overset{\frown}{QS} = m\overset{\frown}{PR} = 120^0$

प्रश्नावली 13.1

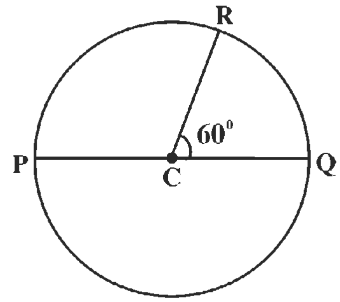
1. एक वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं द्वारा बने लघु और दीर्घ चापों में उनकी मापों का अनुपात 1:2 है। दोनों चापों की माप बताइए।

2. एक वृत्त PRQ में PQ व्यास तथा CR एक त्रिज्या है, C वृत्त का केंद्र है। यदि $\angle PCR = 70^0$ हो, तो (i) $m\widehat{PR}$, (ii) $m\widehat{RQ}$ व (iii) $m\widehat{PQR}$ के मान ज्ञात कीजिए।

3. आकृति 13.7 में दिए गए वृत्त में C उसका केन्द्र है। $\angle RCQ = 60^0$ है, तो निम्नलिखित की मापें ज्ञात कीजिए :

   (i) लघु $\widehat{QR}$, (ii) लघु $\widehat{PR}$, (iii) अर्द्ध वृत्त PRQ,

   (iv) दीर्घ $\widehat{QR}$, (v) दीर्घ $\widehat{PR}$



आकृति 13.7

4. एक वृत्त का केंद्र O है। इसके लघु चाप AB में P एक बिन्दु है। $m\widehat{PB}$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $m\widehat{AB} = 140^0$ एवं $m\widehat{AP} = 80^0$

5. निम्नलिखित प्रश्नों के दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर लिखिए

(1) A, B किसी वृत्त पर दो बिन्दु हैं। यदि m (लघु $\widehat{AB}$) = 120^0 है, तो m (दीर्घ $\widehat{AB}$) का मान होगा

   (i) 240^0 (ii) 320^0 (iii) 140^0 (iv) 60^0

(2) यदि किसी वृत्त के लघु चाप और उसके संगत दीर्घ चाप की मापों में अनुपात 1:3 है, तो इन चापों की मापें होंगी

   (i) $20^0, 60^0$ (ii) $30^0, 90^0$ (iii) $90^0, 270^0$ (iv) $120^0, 360^0$

(3) O केंद्र वाले एक वृत्त का AB व्यास एवं OC उसकी एक त्रिज्या है तथा $\angle AOC = 70^0$ है, तो $m\widehat{ABC}$ का मान होगा

   (i) 180^0 (ii) 220^0 (iii) 280^0 (iv) 290^0

(4) यदि किसी वृत्त के दो केंद्रीय कोणों में से प्रत्येक कोण लघु चाप अंत:खंडित करता है तथा दोनों केंद्रीय कोण बराबर हैं, तो वें अंत:खंडित चाप

   (i) असमान होंगे।

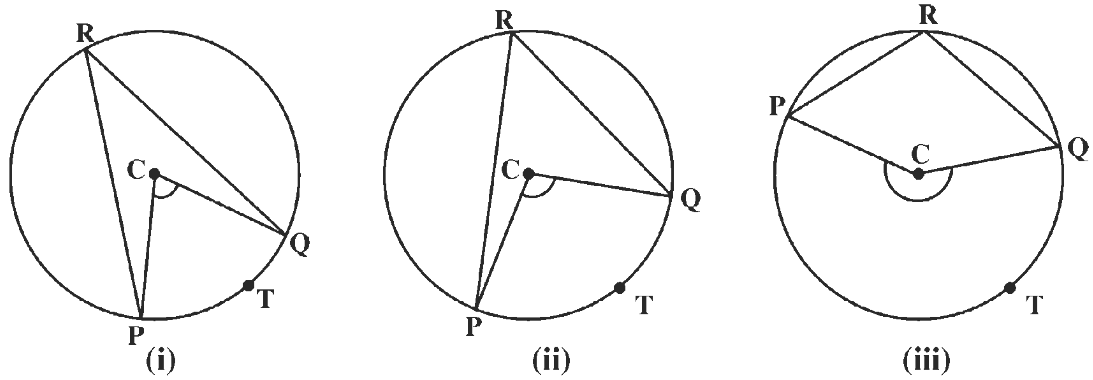
   (ii) सर्वांगसम होंगे

   (iii) सर्वांगम नहीं होंगे।

   (iv) इनमें कोई नहीं।

13.4 अंतर्गत कोण व अंत:खंडित चाप में संबंध

क्रियाकलाप 2. आकृति 13.8 को देखिए। इस आकृति में बने तीन वृत्तों की भांति तीन वृत्त खींचिए।



आकृति 13.8

उपर्युक्त आकृति के वृत्त (i) में P व Q दो बिन्दु लेकर इनके द्वारा बने लघु चाप PQ में एक बिन्दु T एवं दीर्घ चाप PQ में बिन्दु R लीजिए। फिर PR, QR, PC एवं QC को मिलाइए। यहाँ $\angle PRQ$ अंतर्गत कोण और $\overset{\frown}{PTQ}$ अंत:खंडित चाप बना।

वृत्त (i) जैसे ही किन्तु भिन्न प्रकार के कोणों वाले वृत्त (ii) एवं (iii) में बिन्दुओं का नामांकन वृत्त (i) जैसा ही कीजिए। इन तीनों वृत्तों को सरल क्रमांक क्रमशः 1, 2, व 3 दीजिए।

अब तीनों वृत्तों में $\angle PRQ$ व $\angle PCQ$ का मापन कीजिए तथा $m\overset{\frown}{PTQ}$ और $m\overset{\frown}{PTQ} - 2\angle PRQ$ का मान निकालिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में लिखिए

वृत्त	$\angle PRQ$	$\angle PCQ$	$m\overset{\frown}{PTQ} - 2\angle PRQ$
1.			
2.			
3.			

ऊपर सारणी में अंकित किए गए प्रेक्षणों के अवलोकन में हम क्या पाते हैं?

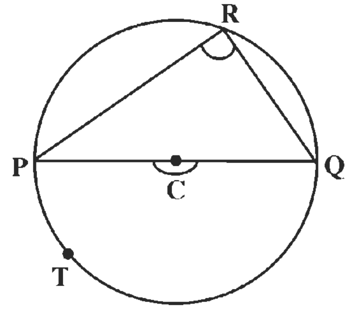
हम देखेंगे कि प्रत्येक (तीनों) स्थिति में अंतर $m\overset{\frown}{PTQ} - 2\angle PRQ$ शून्य या नगण्य है जो छोड़ा जा सकता है। अत: सभी स्थितियों में $m\overset{\frown}{PTQ} - 2\angle PRQ = 0$ अर्थात $m\overset{\frown}{PTQ} = 2\angle PRQ$, जहाँ $\angle PRQ$ अंतर्गत कोण और $\overset{\frown}{PTQ}$ संगत अंत:खंडित चाप है।

इस क्रियाकलाप से हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होता है

> **'किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण से दुगुना होता है।'**

13.5 अर्द्धवृत्त का कोण : 'अर्द्धवृत्त का कोण' से तात्पर्य अर्द्धवृत्त के अंतर्गत कोण से होता है। यहाँ हम इसकी विशेष माप के बारे में समझेंगे।

आकृति 13.9 में वृत्त PTQR में PRQ एक अर्द्धवृत्त है। इसमें $\angle PRQ$ इस अर्द्धवृत्त का कोण है जिसके द्वारा अंत:खंडित चाप अर्द्धवृत्त PTQ है।



आकृति 13.9

अंशमाप $m\widehat{PTQ}$ का मान क्या होगा?

हम देख चुके हैं कि अर्द्धवृत्त का माप 180^0 होता है। तब $\angle PRQ$ का माप क्या होगा? निश्चित ही $\angle PRQ = \frac{1}{2}\angle PCQ = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$

इस तथ्य की पुष्टि के लिए निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं

क्रियाकलाप 3 : आकृति 13.9 जैसे ही भिन्न केंद्र और त्रिज्याओं वाले दो अन्य वृत्त और बनाइए तथा तीनों वृत्तों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। इन्हें क्रमश: 1, 2 व 3 सरल क्रमांक दीजिए। अब तीनों वृत्तों में $\angle PRQ$ की माप ज्ञात कीजिए। इसी आधार पर तीनों स्थितियों में $90^0 - \angle PRQ$ का मान ज्ञात कीजिए तथा अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में रखिए।

वृत्त	$\angle PRQ$	$90^0 - \angle PRQ$
1.		
2.		
3.		

ऊपर सारणी में अंकित प्रेक्षणों के अवलोकन में हम क्या पाते हैं? हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $90^0 - \angle PRQ$ का मान शून्य या नगण्य रूप से बहुत छोटा आता है जिसे हम छोड़ सकते हैं। अत: सभी स्थितियों में

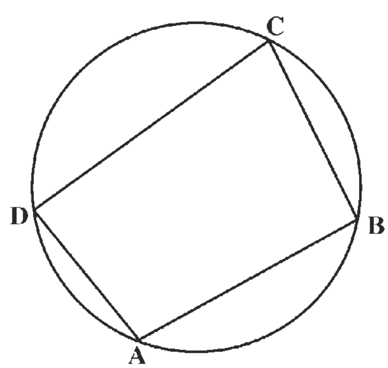
$90^0 - \angle PRQ = 0$ या $\angle PRQ = 90^0$

इस क्रियाकलाप से निम्न तथ्य की पुष्टि होती है।

अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

13.6 चक्रीय बिन्दु, चक्रीय चतुर्भुज तथा उसके कोण :

आकृति 13.10 को देखिए। इस आकृति में एक चतुर्भुज ABCD वृत्त के अंतर्गत बना हुआ चतुर्भुज है। इसके चारों शीर्ष वृत्त पर स्थित हैं। ऐसे

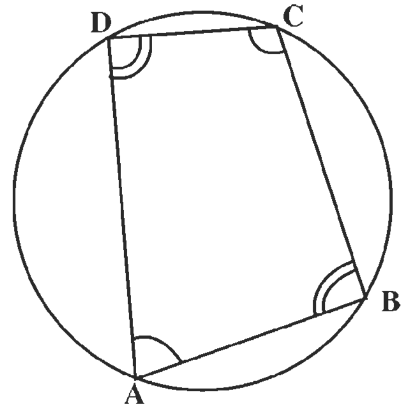


आकृति 13.10

चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं तथा जिसके चारों शीर्ष A, B, C व D चक्रीय बिन्दु कहलाते हैं। इन्हें एकवृत्तीय बिन्दु भी कहते हैं।

यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं, तो वह चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है तथा उसके चारों शीर्ष चक्रीय बिन्दु कहलाते हैं।

अब आकृति 13.11 को देखिए। यहाँ चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। इसमें कोणों के दो जोड़े $\angle A, \angle C$ तथा $\angle B$ व $\angle D$ हैं। इन दोनों जोड़ों के कोण परस्पर सम्मुख कोण कहलाते हैं।

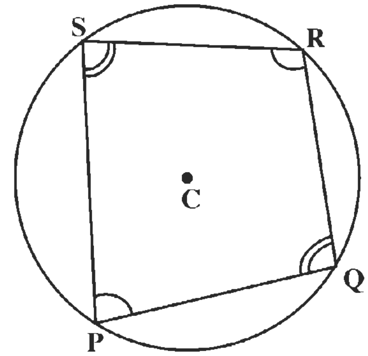


आकृति 13.11

क्रियाकलाप 4 : इसी प्रकार के अन्य दो चक्रीय चतुर्भुज बनाकर उनमें सम्मुख कोणों को लिखकर बताइए।

13.7 चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण एक-दूसरे के पूरक होते हैं :

क्रियाकलाप 5. एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C है। इसमें एक चक्रीय चतुर्भुज PQRS बनाइए (आकृति 13.12)



आकृति 13.12

इसी प्रकार दो अन्य केन्द्रों पर भिन्न त्रिज्याओं वाले दो और वृत्त बनाइए। इन आकृतियों का नामांकन एक जैसा रखिए। तीनों आकृतियों में चतुर्भुज PQRS की क्रम संख्या क्रमशः 1, 2 एवं 3 रखिए।

अब उपर्युक्त प्रत्येक आकृति के लिए $\angle P, \angle Q, \angle R$ एवं $\angle S$ की मापें ज्ञात करके $\angle P + \angle R$ एवं $\angle Q + \angle S$ के मान ज्ञात कीजिए।

इन प्रेक्षणों को एक सारणी में निम्नानुसार लिखिए :

चतुर्भुज	$\angle P$	$\angle R$	$\angle P + \angle R$	$\angle Q$	$\angle S$	$\angle Q + \angle S$
1.						
2.						
3.						

उक्त सारणी में प्राप्त इन मानों का अवलोकन करने पर हमें कौन-सा तथ्य स्पष्ट होता है?

हम पाते हैं कि तीनों स्थितियों में $\angle P+\angle R = 180^0 = \angle Q + \angle S$

मापने में मानवीय त्रुटि के कारण $\angle P + \angle R$ तथा $\angle Q + \angle S$ के मान 180^0 से थोड़े कम या अधिक भी प्राप्त हो सकते हैं, पर अंतर नगण्य रहता है।

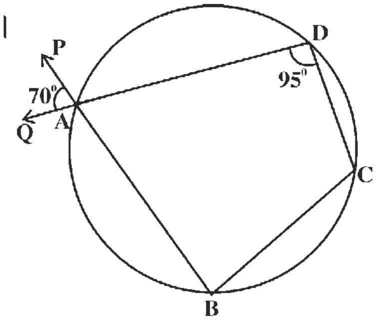
इससे यह तथ्य सत्यापित होता है कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों की मापों का योग 180^0 होता है अर्थात् वे एक-दूसरे के पूरक होते हैं।

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण एक-दूसरे के पूरक होते हैं।

इस तथ्य के आधार पर कई प्रश्नों को हल किया जा सकता है।

उदाहरण 2. आकृति 13.13 में $\angle PAQ = 70^0$ तथा $\angle D = 95^0$ है। चतुर्भुज ABCD के निम्नांकित कोण ज्ञात कीजिए:

(i) $\angle A$ (ii) $\angle B$ (iii) $\angle C$



आकृति 13.13

हल : (i) $\angle A$ या $\angle DAB = \angle PAQ = 70^0$ (शीर्षाभिमुख कोण)

(ii) $\angle D = 95^0$ (दिया है।)

$\angle B + \angle D = 180^0$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $\angle B + 95^0 = 180^0$

या $\angle B = 180^0 - 95^0 = 85^0$

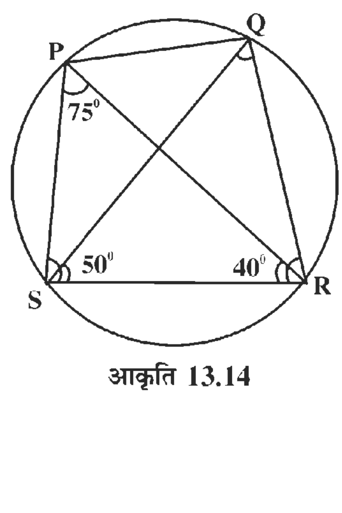
(iii) $\angle C + \angle DAB = 180^0$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $\angle C + 70^0 = 180^0$ (ऊपर (i) में $\angle DAB = 70^0$ ज्ञात कर चुके हैं।)

या $\angle C = 180^0 - 70^0 = 110^0$

प्रश्नावली 13.2

1. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD में $\angle A = 80^0$ एवं $\angle B = 70^0$, तो $\angle C$ तथा $\angle D$ ज्ञात कीजिए। आकृति बनाकर उत्तर निकालिए।
2. आकृति 13.14 में $\angle SPR = 75^0$, $\angle RSQ = 50^0$ एवं $\angle SRP = 40^0$ है, तो (i) $\angle PSQ$, (ii) $\angle PQR$ तथा (iii) $\angle QRS$ को ज्ञात कीजिए।

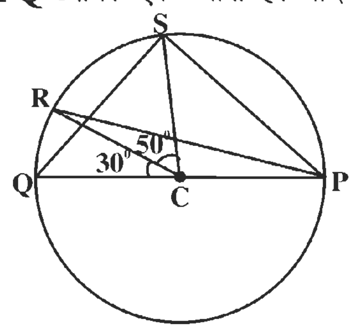


आकृति 13.14

3. यदि आकृति 13.14 में PR एवं QS का प्रतिच्छेदन बिन्दु T है, तो $\angle PTQ$ तथा $\angle QTR$ को भी ज्ञात कीजिए।

4. एक वृत्त के अंतर्गत एक समान्तर चतुर्भुज PQRS बना हुआ है।
   (i) क्या $\angle P = \angle R$ है? क्यों?
   (ii) क्या $\angle P + \angle R = 180^0$ है? क्यों?
   (iii) क्या $\angle P = \angle R = 90^0$ है? क्यों?
   (iv) क्या $\angle Q = \angle S = 90^0$ है? क्यों?
   (v) क्या PQRS एक आयत है? क्यों?

5. आकृति 13.15 में दिये गए वृत्त का केंद्र C और PQ उसका एक व्यास है। यदि $\angle QCR = 30^0$ व $\angle RCS = 50^0$ है, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) $\angle QPR$
   (ii) $\angle RPS$
   (iii) $\angle PCS$
   (iv) $\angle PQS$

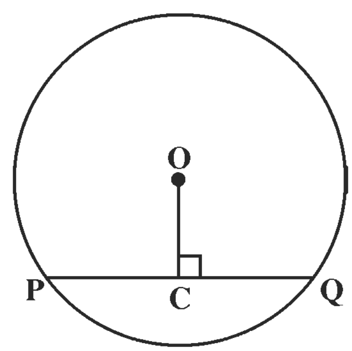


आकृति 13.15

6. निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए
   (i) जिस चतुर्भुज के चारों शीर्ष किसी वृत्त पर स्थित हों वह .... कहलाता है।
   (ii) चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण एक-दूसरे के .... होते हैं।
   (iii) चक्रीय बिन्दु किसी .... चतुर्भुज के चारों शीर्ष होते हैं।
   (iv) चक्रीय बिन्दुओं को .... बिन्दु भी कहते हैं।

13.8 किसी जीवा पर वृत्त के केन्द्र से डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है

क्रियाकलाप 6. कागज पर एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। इस वृत्त की एक जीवा PQ भी खींचिए। $OC \perp PQ$ इस प्रकार खींचिए कि बिन्दु C जीवा PQ पर हो (आकृति (13.16) फिर अलग केन्द्र और अलग त्रिज्या लेकर दो अन्य वृत्त खींचिए तथा उन्हें भी आकृति 13.16 की भाँति ही नामांकित कीजिए। इन तीनों वृत्तों को क्रमशः 1, 2 और 3 सरल क्रमांक दीजिए।



आकृति 13.16 (i)

अब तीनों वृत्तों में PC और QC को मापिए और इनके अंतर PC – QC के मान ज्ञात कीजिए।

अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में लिखिए :

वृत्त	PC	QC	PC – QC
1.			
2.			
3.			

उपर्युक्त सारणी में अंकित किए गए मानों के अवलोकन में हम क्या पाते हैं?

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में अंतर PC – QC शून्य या नगण्य रूप से कम आता है जिसे हम छोड़ सकते हैं। अत: सभी स्थितियों में PC = QC प्राप्त होता है। इससे निम्नलिखित निष्कर्ष निकलता है :

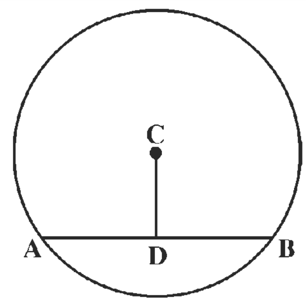
किसी जीवा पर वृत्त के केन्द्र से डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।

क्रियाकलाप 7.

चरण 1. समुचित त्रिज्या वाला एक वृत्त बनाइए और उसके केन्द्र को C से नामांकित कीजिए।

चरण 2. वृत्त की एक जीवा AB बनाइए

चरण 3. केन्द्र C से जीवा AB पर लम्ब CD बनाइए जहाँ बिन्दु D जीवा AB पर स्थित है।

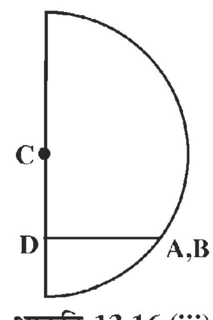


आकृति 13.16 (ii)

चरण 4. एक ट्रेसिंग कागज पर उपरोक्त वृत्त, उसकी जीवा व जीवा के लम्ब CD की प्रति बनाइए।

चरण 5. वृत्त की ट्रेसिंग कागज पर बनी प्रति को CD पर इस प्रकार मोड़िए कि रेखाखण्ड AD रेखा खण्ड BD पर आए और हम पाते हैं कि बिन्दु A, बिन्दु पर B पर आता है और रेखा खण्ड AD रेखा खण्ड BD को पूरा-पूरा ढंकता है।

हम कह सकते हैं कि AD = BD (आकृति 13.16 (iii))



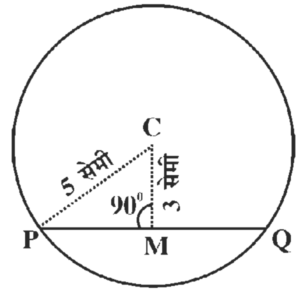
आकृति 13.16 (iii)

किसी वृत्त के केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब, जीवा का समद्विभाजन करता है।

अब हम इस तथ्य पर आधारित प्रश्नों को हल करना सीखेंगे।

उदाहरण 3. एक वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है। वृत्त के केन्द्र से एक जीवा 3 सेमी की दूरी पर है। उस जीवा की लम्बाई कितनी होगी?

हल : C को केंद्र मानकर एवं 5 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाइए तथा केन्द्र C से CM=3 सेमी दूरी पर $CM \perp PQ$ एक जीवा, आकृति 13.17 की भांति बनाइए।



आकृति 13.17

आकृति 13.17 में, ΔCMP एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें CP = 5 सेमी., CM=3 सेमी तथा $\angle CMP = 90^0$

अतः $MP = \sqrt{CP^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ सेमी (पाइथागोरस प्रमेय से)

तथा PQ= 2 MP (वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है)

$= 2 \times 4$ सेमी

$= 8$ सेमी उत्तर

प्रश्नावली 13.3

1. 13 सेमी त्रिज्या वाले किसी वृत्त में उसकी एक जीवा केन्द्र से 5 सेमी की दूरी पर है। उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. 7.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा की लम्बाई 9 सेमी है, तो उसकी केन्द्र से दूरी बताइए।
3. किसी वृत्त के केन्द्र से 4 सेमी दूरी वाली उसकी एक जीवा की लम्बाई 6 सेमी है, तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
4. किसी वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए जिनसे होकर जाने वाली रेखा केन्द्र से l दूरी पर है तथा उस वृत्त की त्रिज्या m है।
5. निम्नलिखित प्रश्नों के दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए

(1) किसी जीवा पर केन्द्र से खींची गई लम्ब रेखा

(i) उसके मध्य बिन्दु से गुजरती है। (ii) उसे 1:3 में विभाजित करती है।

(iii) उसे 1:4 में विभाजित करती है। (iv) इनमें से कोई नहीं।

(2) 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से उसकी एक जीवा तक रेखाखण्ड 3 सेमी का है, तो उस जीवा की माप होगी

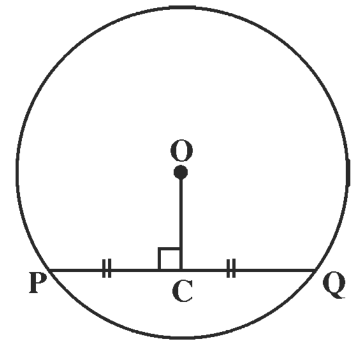
(i) 6 सेमी (ii) 8 सेमी (iii) 10 सेमी (iv) 16 सेमी

(3) एक वृत्त के केन्द्र से उसकी 24 सेमी की जीवा तक खींचे गए लम्ब रेखाखण्ड की लम्बाई 5 सेमी है, तो वृत्त की त्रिज्या की माप होगी

(i) 19 सेमी (ii) 29 सेमी (iii) 13 सेमी (iv) 8 सेमी

13.9 जीवा के मध्य बिन्दु और केन्द्र को मिलाने वाली रेखा उस पर लम्ब होती है

क्रियाकलाप 8. एक वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। इसकी एक जीवा PQ खींचकर उसे C पर समद्विभाजित कीजिए। फिर आकृति 13.18 की भांति OC को मिलाइए। इसी प्रकार के अलग-अलग त्रिज्याओं वाले दो और वृत्त खींचिए तथा उक्त क्रियाकलाप को दोहराइए। उक्त तीनों आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। इन तीनों आकृतियों को सरल क्रमांक 1, 2 व 3 दीजिए।



आकृति 13.18

तीनों स्थितियों में $\angle OCP$ को मापिए और $90^0 - \angle OCP$ का मान ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में लिखिए

वृत्त	$\angle OCP$	$90^0 - \angle OCP$
1.		
2.		
3.		

उपर्युक्त प्रेक्षणों से हमें क्या ज्ञात होता है? हम देखेंगे कि तीनों स्थितियों में $90^0 - \angle OCP$ का मान या तो शून्य आता है या इतना कम होता है, जिसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार प्रत्येक स्थिति में $\angle OCP = 90^0$ अर्थात $OC \perp PQ$.

यही परिणाम $\angle OCP$ के स्थान पर $\angle OCQ$ को लेकर भी प्राप्त कर सकते हैं।

उक्त क्रियाकलाप से वृत्त के निम्नलिखित गुण का सत्यापन होता है।

वृत्त में उसकी किसी जीवा के मध्य बिन्दु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा उस जीवा पर लम्ब होती है।

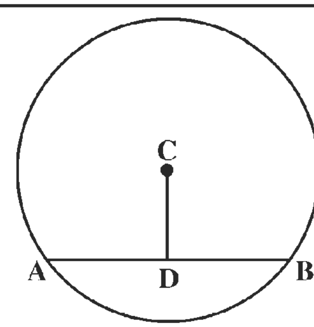
क्रियाकलाप 9

चरण 1. उचित त्रिज्या वाला एक वृत्त बनाइए और उसके केन्द्र को C से नामांकित कीजिए।

चरण 2. वृत्त की एक जीवा AB बनाइए और उसके केन्द्र को D से नामांकित कीजिए।

चरण 3. C और D को मिलाइए।

चरण 4. उपरोक्त प्राप्त चित्र की एक प्रति ट्रेसिंग कागज पर बनाइए।



आकृति 13.19

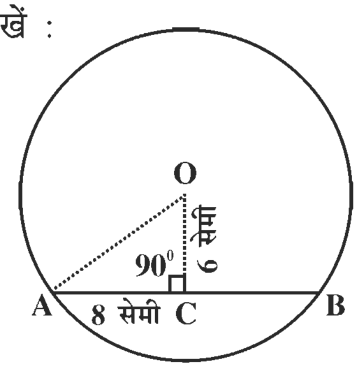
चरण 5. वृत्त की इस प्रति को इस प्रकार मोड़िए कि बिन्दु A, बिन्दु B पर आए और रेखाखण्ड AD, रेखाखण्ड BD को पूरा-पूरा ढंक ले। हम पाते हैं कि, मोड़ रेखाखण्ड CD पर आ रहा है और $\angle ADC$ ने $\angle BDC$ को पूरा-पूरा ढंक लिया है।

हम कह सकते हैं कि $\angle ADC = \angle BDC$

किन्तु $\angle ADC$ व $\angle BDC$ कोणों का रेखिक युग्म है, इसलिए $\angle ADC = \angle BDC = 90^0$ अर्थात वृत्त के केन्द्र C से जीवा AB के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

आइए, वृत्त के इस गुण पर आधारित प्रश्नों को हल करना सीखें :

उदाहरण 4. किसी वृत्त की 16 सेमी लम्बाई वाली एक जीवा उसके केन्द्र से 6 सेमी की दूरी पर है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.20

हल : मान लीजिए कि दिए हुए वृत्त का केन्द्र O तथा दी हुई जीवा AB है जिसका समद्विभाजक बिन्दु C है। अतः AC = 8 सेमी होगी।

OC को मिलाया। तब, $\angle OCA = 90^0$ (जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा इस पर लम्ब होती है।)

फिर OA को मिलाया। तब, ΔOCA एक समकोण त्रिभुज है।

समकोण त्रिभुज OCA में,

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{OC^2 + CA^2} \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (8)^2} \text{ सेमी} \\ &= \sqrt{36 + 64} \text{ सेमी} \\ &= \sqrt{100} \text{ सेमी} \\ &= 10 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट त्रिज्या (OA) की लम्बाई 10 सेमी है। उत्तर

प्रश्नावली 13.4

1. केन्द्र से 5 सेमी दूरस्थ वृत्त की एक जीवा की लम्बाई 24 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
2. किसी वृत्त में उसकी त्रिज्या 5 सेमी है। उस वृत्त की 8 सेमी लम्बाई वाली जीवा की केन्द्र से दूरी

ज्ञात कीजिए।

3. एक वृत्त की जीवा की लम्बाई 8 सेमी है जो उसके केंद्र से 3 सेमी दूरी पर है। उसी वृत्त की एक दूसरी 6 सेमी लम्बाई वाली जीवा की उसके केंद्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

4. किसी वृत्त पर स्थित तीन बिन्दुओं की सहायता से वृत्त के केंद्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित प्रश्नों के दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए

   (1) किसी वृत्त की एक जीवा के मध्य बिन्दु से खींची गई लम्ब रेखा

   (i) परिधि को स्पर्श करेगी (ii) परिधि को तीन बिन्दुओं पर काटेगी

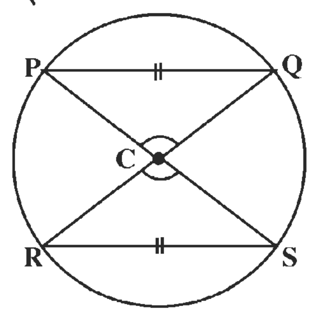
   (iii) केंद्र से गुजरेगी (iv) इनमें से कोई नहीं।

   (2) किसी वृत्त में उसकी एक जीवा 8 सेमी लम्बी है जो उसके केंद्र से 3 सेमी की दूरी पर है, तो वृत्त की त्रिज्या की लम्बाई होगी

   (i) 11 सेमी (ii) 5 सेमी (iii) 24 सेमी (iv) 6 सेमी

13.10 समान जीवा केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती है और इसका विलोम

क्रियाकलाप 10. एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C है। इस वृत्त की दो समान जीवाएँ PQ एवं RS भी खींचिए। अब CP, CQ, CR एवं CS को मिलाइए (आकृति 13.21)



आकृति 13.21

उपर्युक्त प्रकार से ही अलग-अलग केन्द्र और त्रिज्याओं वाले दो अन्य वृत्त खींचिए। तीनों आकृतियों को एक जैसी ही नामांकित करके इन्हें सरल क्रमांक 1, 2 एवं 3 दीजिए।

$\angle PCQ$ तथा $\angle RCS$ का मापन कीजिए तथा तीनों स्थितियों में कोणों की मापों का अन्तर $\angle PCQ - \angle RCS$ ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में लिखिए

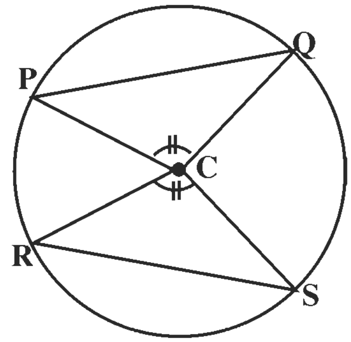
वृत्त	$\angle PCQ$	$\angle RCS$	$\angle PCQ - \angle RCS$
1.			
2.			
3.			

उपर्युक्त प्रेक्षणों से हमें क्या ज्ञात होता है? हम देखेंगे कि तीनों स्थितियों में और इसी प्रकार की प्रत्येक स्थिति में $\angle PCQ - \angle RCS$ का मान शून्य अथवा इतना कम होगा कि उसे हम छोड़ सकते हैं। अत: इस प्रकार की सभी स्थितियों में, $\angle PCQ - \angle RCS = 0$ अर्थात $\angle PCQ = \angle RCS$ है।

उक्त क्रियाकलाप से वृत्त के निम्नलिखित गुण का सत्यापन होता है :

वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती (बनाती) हैं।

क्रियाकलाप 11. एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C है। इस वृत्त की चार त्रिज्याएँ CP, CQ, CR एवं CS इस प्रकार खींचिए कि $\angle PCQ = \angle RCS$ हो। PQ तथा RS को मिलाइए (आकृति 13.22)।



आकृति 13.22

फिर अलग केन्द्र और अलग मापों की त्रिज्याओं वाले दो अन्य वृत्त इसी प्रकार खींचकर क्रियाकलाप दोहराइए। इन तीनों आकृतियों को एक जैसी ही नामांकित करके इन्हें सरल क्रमांक 1, 2 एवं 3 दीजिए।

PQ तथा RS को मापिए एवं तीनों स्थितियों में जीवाओं PQ एवं RS का अंतर PQ-RS ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में लिखिए

वृत्त	PQ	RS	PQ – RS
1.			
2.			
3.			

उपर्युक्त प्रेक्षणों से हमें क्या ज्ञात होता है? हम देखेंगे कि उक्त तीनों स्थितियों एवं इसी प्रकार की प्रत्येक स्थिति में PQ – RS (अंतर) का मान शून्य अथवा इतना कम होगा कि उसे हम छोड़ सकते हैं। अत: इस प्रकार की सभी स्थितियों में,

$PQ - RS = 0$ अर्थात् $PQ = RS$ है।

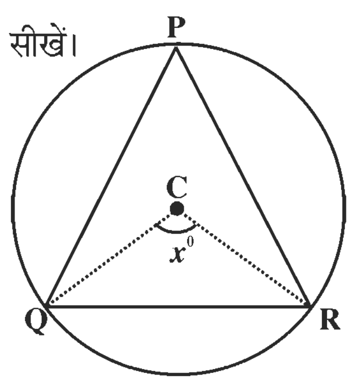
इस क्रियाकलाप से वृत्त के निम्नलिखित गुण का सत्यापन होता है :

केन्द्र पर समान कोण बनाने वाली जीवाएँ समान होती हैं।

टिप्पणी यह गुण पूर्व गुण का विलोम है।

आइए, उक्त सत्यापित गुण पर आधारित प्रश्नों को हल करना सीखें।

उदाहरण 5. एक वृत्त का केन्द्र C है जिसके अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज PQR बना है (आकृति 13.23)। $\angle QCR$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.23

हल : मान लीजिए $\angle QCR = x^0$

चूँकि ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है, अत: इसकी प्रत्येक भुजा केंद्र C पर x^0 का कोण अन्तरित करेगी।

केन्द्र C पर अन्तरित तीनों कोणों का योग 360^0 है।

अर्थात् $3x^0 = 360^0$

या $x^0 = \frac{360^0}{3} = 120^0$

अत: $\angle QCR = 120^0$ उत्तर

प्रश्नावली 13.5

1. किसी वृत्त के अंतर्गत बने वर्ग की प्रत्येक भुजा उसके केन्द्र पर कितना कोण अन्तरित करेगी?
2. एक समअष्टभुज किसी वृत्त के अंतर्गत स्थित है। उसकी प्रत्येक भुजा केन्द्र पर कितना कोण अंतरित करेगी?
3. किसी वृत्त के अंतर्गत बने एक समबहुभुज की भुजाओं की संख्या n है। उस समबहुभुज की प्रत्येक भुजा द्वारा केन्द्र पर कितना कोण अंतरित होगा?
4. एक वृत्त के अंतर्गत एक समबहुभुज स्थित है। उसकी प्रत्येक भुजा केन्द्र पर 60^0 का कोण अन्तरित करती है, तो उस समबहुभुज का मान बताइए।
5. एक वृत्त के अंतर्गत बने उस समबहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा केन्द्र पर 20^0 का कोण अन्तरित करती है।
6. एक वृत्त में एक समषटभुज तथा एक समपंचभुज अंतर्गत रूप से स्थित हैं। इन दोनों समबहुभुजों में से किसकी प्रत्येक भुजा अधिक बड़ा कोण केन्द्र पर अंतरित करेगी और वह दूसरे समबहुभुज की प्रत्येक भुजा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण से कितने अंश अधिक माप का होगा?
7. निम्नलिखित प्रश्नों के दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए

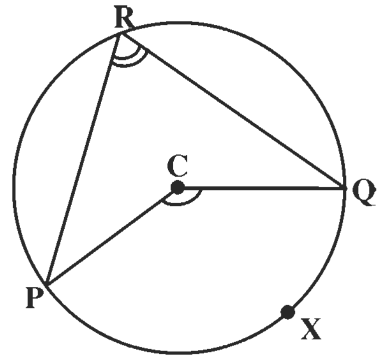
    (1) किसी वृत्त के अंतर्गत स्थित एक समबहुभुज की प्रत्येक भुजा उसके केन्द्र पर 45^0 का कोण अंतरित करती हैं, तो वह समबहुभुज होगा

    (i) समषटभुज (ii) समपंचभुज (iii) समसप्त भुज (iv) समअष्टभुज

    (2) किसी वृत्त के अंतर्गत स्थित एक समपंचभुज की प्रत्येक भुजा उसके केन्द्र पर जितना कोण अंतरित करेगी, उसकी माप होगी

    (i) 45^0 (ii) 60^0 (iii) 72^0 (iv) 90^0

13.11 किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण से दुगुना होता है



आकृति 13.24

क्रियाकलाप 12 : एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C है। इस वृत्त का एक चाप PXQ लीजिए तथा वृत्त के शेष भाग में एक बिन्दु R लीजिए। CP, CQ, RP एवं RQ को मिलाइए (आकृति 13.24)।

इसी प्रकार अलग-अलग केन्द्र और त्रिज्याओं वाले अन्य दो वृत्त खींच कर क्रियाकलाप को दोहराइए। इन तीनों आकृतियों को एक जैसी ही नामांकित करके इन्हें सरल क्रमांक 1, 2 एवं 3 दीजिए।

$\angle PCQ$ एवं $\angle PRQ$ को मापिए और तीनों स्थितियों में अंतर $\angle PCQ - 2\angle PRQ$ मान ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में लिखिए

वृत्त	$\angle PCQ$	$\angle PRQ$	$2\angle PRQ$	$\angle PCQ - 2\angle PRQ$
1.				
2.				
3.				

उपर्युक्त प्रेक्षणों से हमें क्या ज्ञात होता है? हम देखेंगे कि उक्त तीनों तथा इसी प्रकार की प्रत्येक स्थिति में, अंतर $\angle PCQ - 2\angle PRQ$ का मान शून्य अथवा इतना कम रहता है जिसे हम छोड़ सकते हैं। अत:, इस प्रकार की सभी स्थितियों में,

$\angle PCQ - 2\angle PRQ = 0$ अर्थात् $\angle PCQ = 2\angle PRQ$

इस क्रियाकलाप से वृत्त के निम्न गुण का सत्यापन होता है

किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण से दुगुना होता है।

टिप्पणी : चूँकि किसी चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण से दुगना होता है, अत: वृत्त के शेष भाग में भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर अंतरित सभी कोण परस्पर समान होंगे। इसी तथ्य को इस प्रकार भी कहा जाता है :

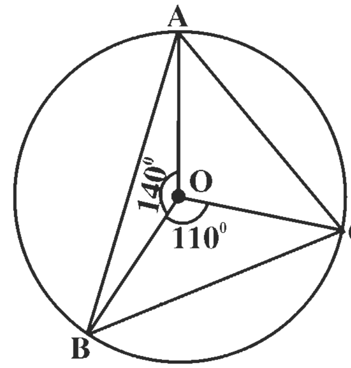
किसी वृत्त की एक ही अवधा के कोण समान होते हैं।

आइए, अब उपर्युक्त गुण पर आधारित प्रश्नों के हल पर विचार करें

उदाहरण 6. एक वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त के अंतर्गत एक ΔABC है (आकृति 13.25)। इसमें $\angle AOB = 140^0$ तथा $\angle BOC = 110^0$ है। निम्नलिखित कोणों की मापें ज्ञात कीजिए

(i) $\angle ACB$ (ii) $\angle BAC$

(iii) $\angle ABC$



आकृति 13.25

हल : (i) $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ (केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर बने कोण का दुगुना होता है)

$$= \frac{1}{2} \times 140^0 = 70^0$$

(ii) $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ (उपर्युक्तानुसार ही)

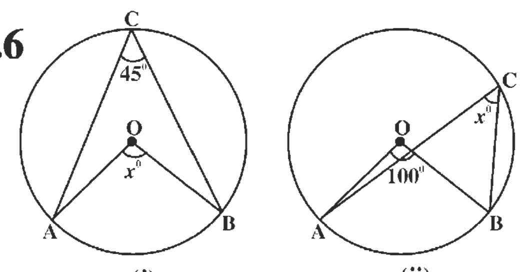
$$= \frac{1}{2} \times 110^0 = 55^0$$

(iii) $\angle ABC = 180^0 - (70^0 + 55^0)$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।)

$$= 55^0$$ उत्तर

प्रश्नावली 13.6

1. आकृति 13.26 में O वृत्त का केन्द्र है। दोनों स्थितियों (i) तथा (ii) के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।

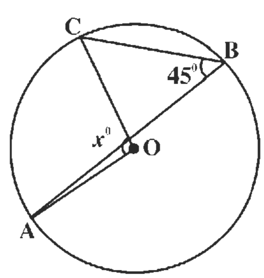


आकृति 13.26

2. आकृति 13.27 में O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle ABC = 45^0$, तो ज्ञात कीजिए

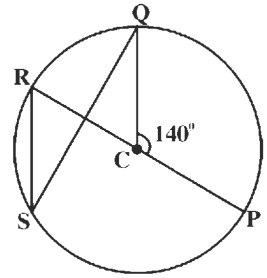
   (i) $\angle AOC$ का मान

   (ii) AO एवं OC में परस्पर संबंध।



आकृति 13.27

3. आकृति 13.28 में, PR केन्द्र C वाले एक वृत्त का व्यास है। यदि $\angle PCQ = 140^0$ है, तो निम्नलिखित कोणों को



आकृति 13.28

ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle QCR$

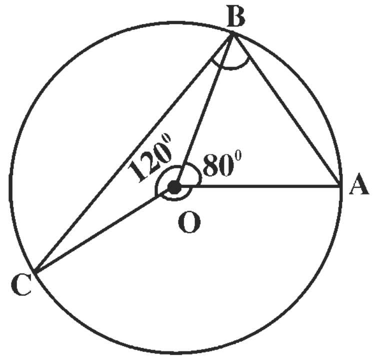
(ii) $\angle QSR$

4. आकृति 13.29 में O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle AOB = 80^0$ एवं $\angle BOC = 120^0$

अब निम्नांकित कोणों को ज्ञात कीजिए

(i) $\angle AOC$

(ii) $\angle ABC$



आकृति 13.29

5. निम्नलिखित में से 'सत्य' तथा 'असत्य' कथनों को छांटिए

(i) किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का आधा होता है।

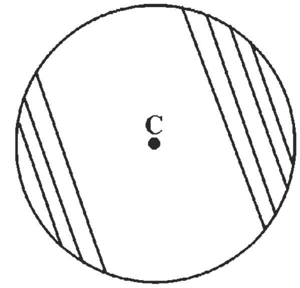
(ii) किसी चाप द्वारा वृत्त के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण का आधा होता है।

(iii) यदि किसी चाप द्वारा केन्द्र पर न्यूनकोण अंतरित है, तो उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग के प्रत्येक बिन्दु पर भी न्यूनकोण ही अंतरित होगा।

(iv) किसी भी दीर्घ चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी भी बिन्दु पर न्यूनकोण अंतरित होता है।

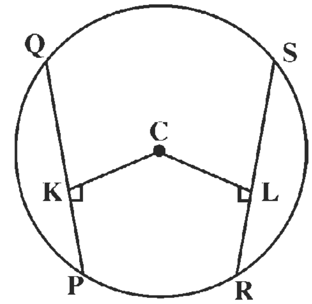
13.12 वृत्त की समान जीवाएँ और उनकी केन्द्र से दूरियाँ :

किसी भी वृत्त में उसकी असंख्य जीवाएँ खींची जा सकती हैं। वृत्त का व्यास भी उसकी सबसे बड़ी जीवा होता है। हम देखते हैं (आकृति 13.30) कि जैसे-जैसे केन्द्र से दूरी बढ़ती है, उस दूरी की जीवा छोटी होती जाती है। क्या वृत्त की दो समान जीवाएँ उसके केन्द्र से समान दूरी पर होंगी? इसी प्रकार क्या केन्द्र से समान दूरी वाली जीवाएँ समान होंगी? इन प्रश्नों के उत्तर हम निम्नलिखित क्रियाकलापों से देखेंगे:



आकृति 13.30

क्रियाकलाप 13. एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C है। इस वृत्त की दो जीवाएँ PQ और RS इस प्रकार खींचिए कि PQ = RS (आकृति 13.31)। केन्द्र C से दोनों जीवाओं पर CK और CL लम्ब रेखाखण्ड खींचिए। अत: $CK \perp PQ$ एवं $CL \perp RS$ (इसमें K व L क्रमश: PQ और RS पर स्थित हैं। इसी प्रकार से अलग-अलग केन्द्र व त्रिज्याओं वाले दो वृत्त और खींचिए जिन्हें इसी प्रकार नामांकित कीजिए तथा उन्हें क्रमश: 1, 2 व 3 सरल क्रमांक दीजिए।



आकृति 13.31

अब हर स्थिति में CK एवं CL को मापिए और अंतर CK – CL का मान ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार सारणी के प्रारूप में लिखिए

वृत्त	CK	CL	CK – CL
1.			
2.			
3.			

उपर्युक्त प्रेक्षणों में हम क्या देखते हैं? हम पाते हैं कि अंतर CK – CL प्रत्येक (तीनों) स्थिति में या तो शून्य है या मानवीय मापन-त्रुटि के कारण नगण्य रूप से बहुत छोटा है जो छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार ऐसी प्रत्येक स्थिति में CK – CL = 0 अर्थात CK = CL है।

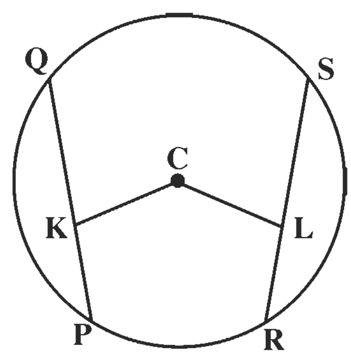
उपर्युक्त क्रियाकलाप से वृत्त का निम्नलिखित गुण स्पष्ट होता है

वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।

अब उपर्युक्त निष्कर्ष के विलोम का अध्ययन करने हेतु निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं :

क्रियाकलाप 14. एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र C है। इस वृत्त की त्रिज्या से कम लम्बाई वाले दो समान लम्बाई के रेखाखण्ड CK व CL खींचिए। अब K व L से गुजरने वाली एवं क्रमशः CK व CL से लम्बवत् दो जीवाएँ खींचिए (आकृति 13.32)। फिर अलग-अलग त्रिज्याओं और केन्द्र वाले दो वृत्त और खींचिए और उनके साथ भी यही क्रियाकलाप दोहराइए। इन तीनों आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित करके इन्हें सरल क्रमांक 1, 2 व 3 दीजिए।

अब PQ व RS का मापन कीजिए। ऐसा प्रत्येक स्थिति में करके अंतर PQ – RS का मान ज्ञात कीजिए। अपने इन प्रेक्षणों को नीचे दर्शाई गई सारणी के प्रारूप में लिखिए :



आकृति 13.32

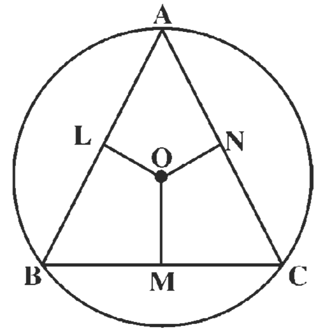
वृत्त	जीवा PQ	जीवा RS	PQ – RS
1.			
2.			
3.			

उपर्युक्त प्रेक्षणों में हम क्या देखते हैं? हम पाते हैं कि अंतर PQ – RS प्रत्येक (तीनों) स्थितियों में या तो शून्य है या मानवीय मापन त्रुटि के कारण नगणन्य रूप से बहुत छोटा है जो छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार ऐसी प्रत्येक स्थिति में PQ – RS = 0 अर्थात् PQ = RS.

उपर्युक्त क्रियाकलाप से वृत्त का निम्न गुण स्पष्ट होता है :

केन्द्र से समान दूरी वाली जीवाएँ समान होती हैं।

उदाहरण 7. समबाहु त्रिभुज ABC के शीर्ष एक वृत्त की परिधि पर स्थित है। वृत्त के केन्द्र O से OL, OM व ON क्रमशः AB, BC व CA पर लम्ब हैं तो इनमें संबंध बताइए।

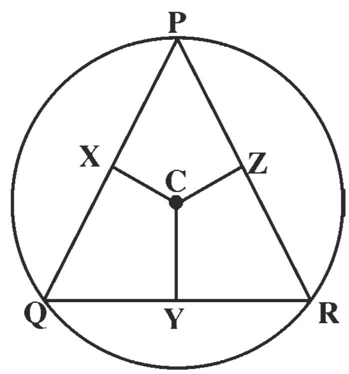


आकृति 13.33

हल : दिया हुआ त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है। अतः AB = BC = CA तथा ये तीनों भुजाएँ वृत्त की समान जीवाएँ हैं तथा OL, OM व ON, केन्द्र से इनकी दूरियाँ होंगी। अतः OL = OM = ON (वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।)

उदाहरण 8. त्रिभुज PQR की भुजाएँ उसके परिवृत्त के केन्द्र C से समान दूरी पर हैं (आकृति 13.34), तो त्रिभुज का प्रकार बताइए।

हल : मान लीजिए कि CX, CY व CZ क्रमशः केन्द्र C से त्रिभुज की भुजाओं PQ, QR व RP पर लम्ब है, तो ये ही त्रिभुज की भुजाओं की केन्द्र से दूरियाँ होंगी जो समान है (दिया हुआ है।) साथ ही, त्रिभुज की भुजाएँ उक्त परिवृत्त की जीवाएँ होंगी।



आकृति 13.34

अतः PQ = QR = RP (केन्द्र से समान दूरी वाली जीवाएँ समान होती हैं)
अर्थात् ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है।

प्रश्नावली 13.7

1. C केन्द्र वाले वृत्त की दो समान जीवाएँ PQ व RS हैं (आकृति 13.35)। PQ व RS को उनकी

सीध में आगे बढ़ाने पर वे वृत्त के बाहर बिन्दु T पर मिलती हैं। CM व CN क्रमश: PQ व RS पर लम्ब हैं। बिंदु M व N क्रमश: PQ व RS पर स्थित हैं। उपर्युक्त स्थिति में निम्नलिखित संबंधों के कारण दीजिए :

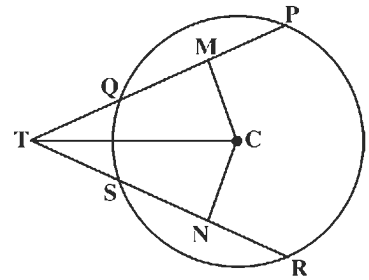
(i) CM = CN

(ii) $\Delta CMT \cong \Delta CNT$

(iii) MT = NT

(iv) PM = RN

(v) PT = RT



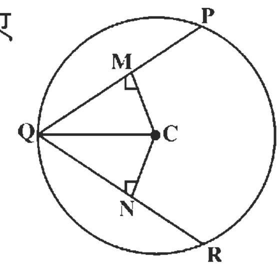
आकृति 13.35

2. C केन्द्र वाले एक वृत्त की दो समान जीवाएँ PQ व QR है। CM और CN क्रमश: PQ व QR पर लम्ब हैं। बिन्दु M व N क्रमश: PQ व QR पर स्थित हैं। C को Q से मिलाया गया है। (आकृति 13.36)। निम्नलिखित तथ्यों के अलग-अलग कारण बताइए

(i) CM = CN

(ii) $\Delta CMQ \cong \Delta CNQ$

(iii) QC द्वारा $\angle PQR$ समद्विभाजित है।



आकृति 13.36

3. एक वृत्त का केन्द्र C तथा PQ व RS उसकी दो समान जीवाएँ हैं जो परस्पर बिन्दु T पर प्रतिच्छेदित करती हैं (आकृति 13.37)। केन्द्र C से PQ व RS पर स्थित बिन्दु M व N पर क्रमश: CM व CN लम्ब रेखाखण्ड हैं। C व T को मिला दिया गया है, तब निम्न तथ्यों के कारण बताइए

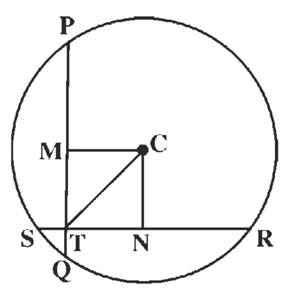
(i) CM = CN

(ii) $\Delta CMT \cong \Delta CNT$

(iii) MT = NT

(iv) PT = RT

(v) QT = ST



आकृति 13.37

4. निम्नलिखित विकल्पों में सही उत्तर चुनिए

(1) एक वृत्त के अंतर्गत स्थित एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ केन्द्र से समान दूरी पर हैं, तो वह त्रिभुज होगा

(i) समद्विबाहु त्रिभुज (ii) समबाहु त्रिभुज (iii) न्यून कोण त्रिभुज (iv) इनमें से कोई नहीं।

(2) एक वृत्त के अंतर्गत स्थित एक त्रिभुज की भुजाएँ केन्द्र से क्रमश: 5 सेमी, 4 सेमी और 5 सेमी की दूरी पर हैं, तो उस त्रिभुज का प्रकार होगा

(i) विषमबाहु त्रिभुज (ii) अधिक कोण त्रिभुज (iii) समद्विबाहु त्रिभुज (iv) समबाहु त्रिभुज।