4 त्रिकोण रचना

चला, शिकूया.

त्रिकोणाच्या घटकांची खालील माहिती दिली असता त्रिकोण काढणे.

- पाया, पायालगतचा एक कोन व उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज
- पाया, पायालगतचा एक कोन व उरलेल्या दोन बाजूंतील फरक
- परिमिती व पायालगतचे कोन

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण खालील त्रिकोण रचना शिकलो आहोत.

✻ सर्व बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढणे.

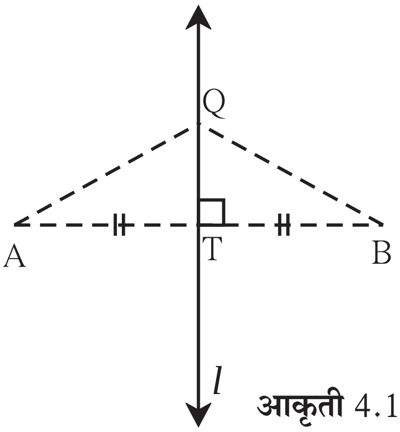
✻ पाया व त्याला समाविष्ट करणारे कोन दिले असता त्रिकोण काढणे.

✻ दोन बाजू व त्यांमधील समाविष्ट कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

✻ कर्ण व एक बाजू दिली असता काटकोन त्रिकोण काढणे.

लंबदुभाजकाचे प्रमेय

- दिलेल्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंपासून समान अंतरावर असतो.
- रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंपासून समान अंतरावर असणारा प्रत्येक बिंदू रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो.



आकृती 4.1

जाणून घेऊया.

त्रिकोण रचना (Constructions of triangles)

त्रिकोण रचना करण्यासाठी आवश्यक अशा तीन बाबी लागतात. तीन कोन व तीन बाजू यांपैकी फक्त दोन बाबी दिल्या आणि या व्यतिरिक्त त्या त्रिकोणासंबंधी आणखी काही माहिती दिली तर त्या माहितीचा आणि दिलेल्या दोन बाबींचा उपयोग करून त्रिकोण कसा काढावा ते पाहू.

एखादा बिंदू दोन भिन्न रेषांवर असेल तर तो बिंदू त्या रेषांचा छेदनबिंदू असतो या गुणधर्माचा पुढील रचनांमध्ये अनेकदा उपयोग केला आहे.

रचना I

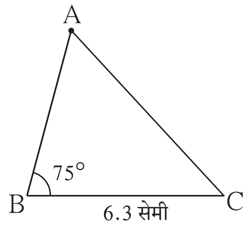
त्रिकोणाचा पाया, पायालगतचा एक कोन आणि उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज दिली असता त्रिकोण काढणे.

उदा. Δ ABC असा काढा की ज्यामध्ये BC = 6.3 सेमी, $\angle$B = 75° आणि AB + AC = 9 सेमी आहे.

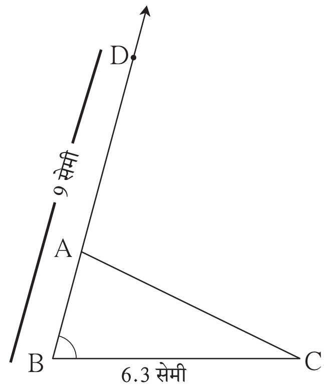
उकल : प्रथम अपेक्षित त्रिकोणाची कच्ची आकृती काढू.

स्पष्टीकरण : कच्च्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे

BC = 6.3 सेमी हा रेषाखंड प्रथम काढू.
बिंदू B जवळ रेषाखंड BC शी 75° कोन करणाऱ्या किरणावर D बिंदू असा घेऊ की
BD = AB + AC = 9 सेमी
किरण BD वर बिंदू A शोधायचा आहे.
BA + AD = BA + AC = 9
∴ AD = AC
∴ बिंदू A हा रेख CD च्या लंबदुभाजकावर आहे.
∴ किरण BD व रेख CD चा लंबदुभाजक यांचा छेदनबिंदू म्हणजे बिंदू A आहे.



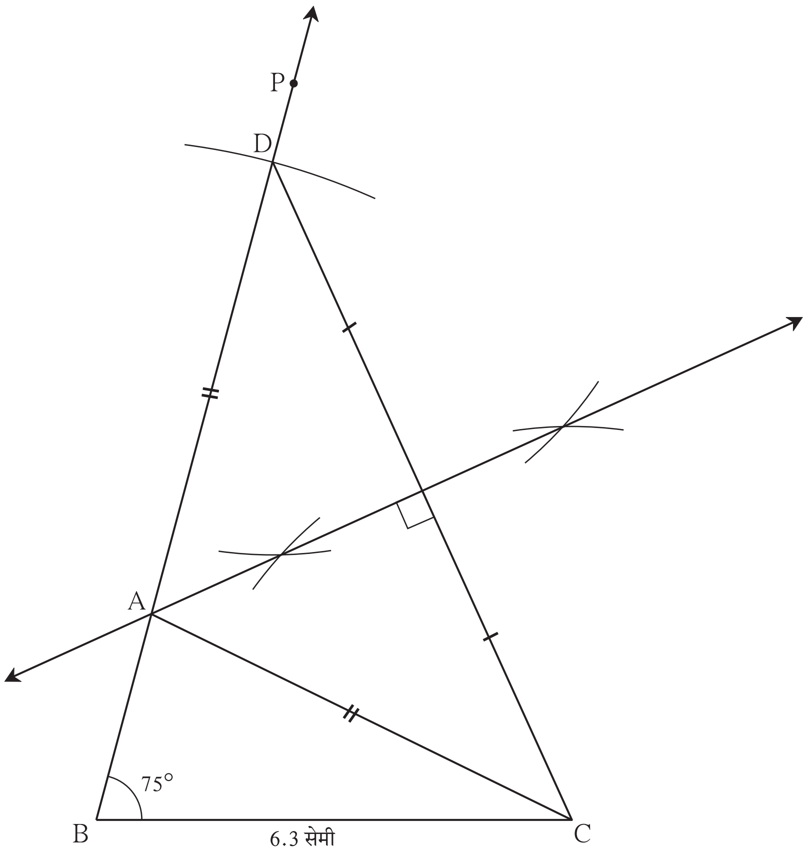
कच्ची आकृती 4.2



कच्ची आकृती 4.3

रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेख BC हा 6.3 सेमी काढा.
(2) B बिंदूपाशी 75° चा कोन करणारा किरण BP काढा.
(3) किरण BP वर d(B,D) = 9 सेमी असा D बिंदू घ्या.
(4) रेख DC काढा.
(5) रेख DC चा लंबदुभाजक काढा.
(6) रेख DC चा लंबदुभाजक व किरण BP यांच्या छेदनबिंदूला A नाव द्या.
(7) रेख AC काढा.
Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्की आकृती 4.4

सरावसंच 4.1

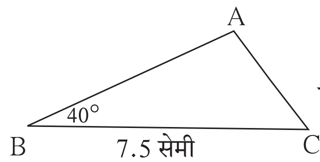
1. Δ PQR असा काढा की पाया QR = 4.2 सेमी, $m\angle Q = 40^\circ$ आणि PQ + PR = 8.5 सेमी
2. Δ XYZ असा काढा की पाया YZ = 6 सेमी, XY + XZ = 9 सेमी. $m\angle XYZ = 50^\circ$
3. Δ ABC असा काढा की पाया BC = 6.2 सेमी, $m\angle ACB = 50^\circ$, AB + AC = 9.8 सेमी
4. Δ ABC असा काढा की पाया BC = 3.2 सेमी, $\angle ACB = 45^\circ$ आणि Δ ABC ची परिमिती 10 सेमी

रचना II

त्रिकोणाचा पाया, उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीतील फरक आणि पायालगतचा एक कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

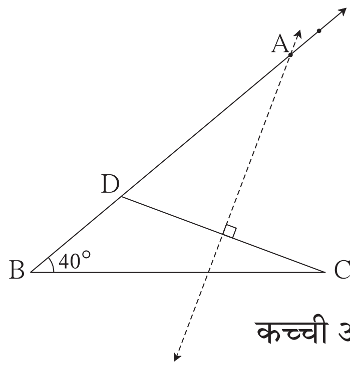
उदा (1) Δ ABC मध्ये BC = 7.5 सेमी, $m\angle ABC = 40^\circ$, AB − AC = 3 सेमी तर Δ ABC काढा.

उकल : प्रथम कच्ची आकृती काढू.



कच्ची आकृती 4.5

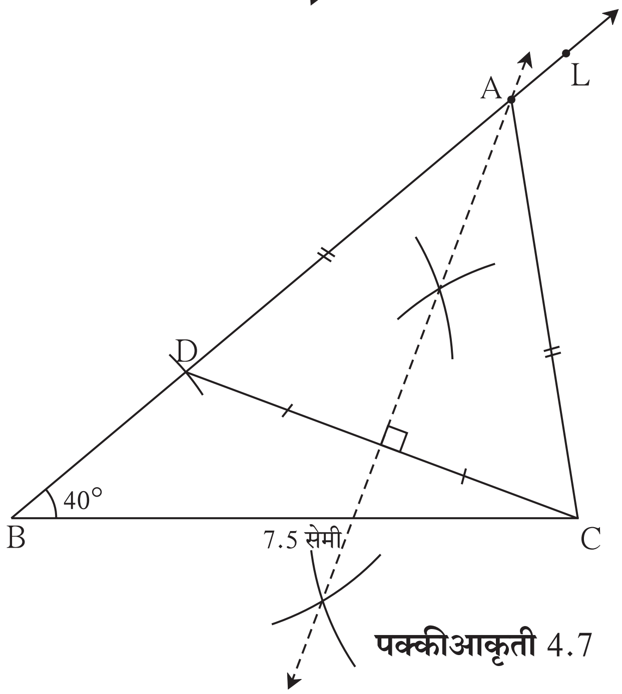
स्पष्टीकरण : AB − AC = 3 सेमी $\therefore$ AB > AC आहे.
BC हा रेषाखंड काढू. रेख BC शी 40° कोन करणारा किरण BL काढता येतो. त्या किरणावर A बिंदू शोधायचा आहे. BD = 3 सेमी असा D बिंदू त्या किरणावर घेतला. आता, B−D−A आणि BD = AB −AD = 3 आणि AB − AC = 3 दिले आहे.
$\therefore$ AD = AC
$\therefore$ A हा बिंदू रेख DC च्या लंबदुभाजकावर आहे.
$\therefore$ बिंदू A हा किरण BL आणि रेख DC च्या लंबदुभाजकाचा छेदनबिंदू आहे.



कच्ची आकृती 4.6

रचनेच्या पायऱ्या

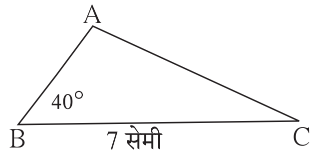
(1) रेख BC हा 7.5 सेमी काढा.
(2) B बिंदूपाशी 40° कोन करणारा किरण BL काढा.
(3) किरण BL वर D बिंदू असा घ्या की BD = 3 सेमी.
(4) रेख CD काढून त्याचा लंबदुभाजक काढा.
(5) रेख CD चा लंबदुभाजक किरण BL ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला A नाव द्या.
(6) रेख AC काढा.
Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्कीआकृती 4.7

उदा. 2 Δ ABC मध्ये बाजू BC = 7 सेमी, $\angle$B = 40° आणि AC – AB = 3 सेमी तर Δ ABC काढा.

उकल : कच्ची आकृती काढू.



कच्ची आकृती 4.8

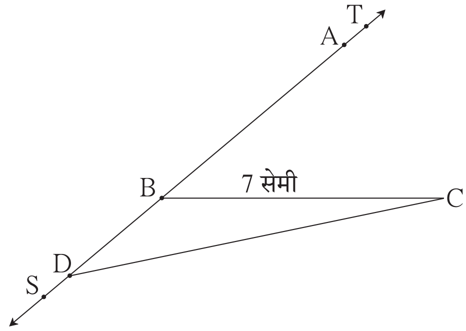
BC = 7 सेमी काढू. AC > AB. BC या रेषाखंडाच्या B बिंदूपाशी 40° चा कोन करणारा किरण BT काढता येतो. बिंदू A या किरणावर आहे. किरण BT च्या विरूद्ध किरणावर बिंदू D असा घ्या की, BD = 3 सेमी.

आता AD = AB + BD = AB + 3 = AC

(कारण AC – AB = 3 सेमी दिले आहे.)

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ A हा बिंदू रेख CD च्या लंबदुभाजकावर आहे.



कच्ची **आकृती** 4.9

रचनेच्या पायऱ्या

(1) BC हा 7 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा.

(2) बिंदू B पाशी 40° चा कोन करणारा किरण BT काढा.

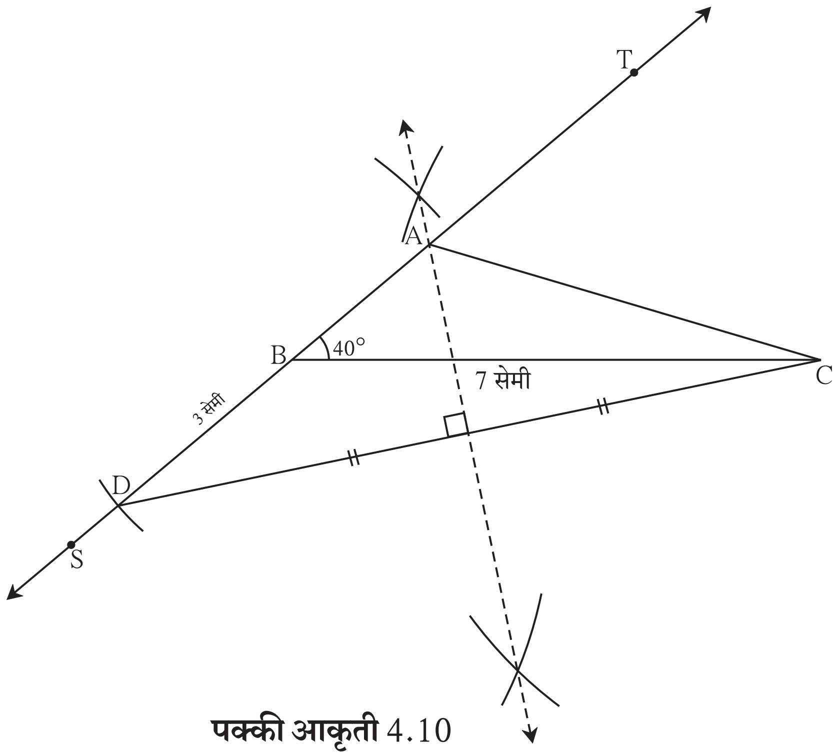
(3) किरण BT च्या विरूद्ध किरण BS वर बिंदू D असा घ्या की BD = 3 सेमी.

(4) रेख DC चा लंबदुभाजक काढा.

(5) रेख DC चा लंबदुभाजक किरण BT ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला A नाव द्या.

(6) रेख AC काढा.

Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्की आकृती 4.10

सरावसंच 4.2

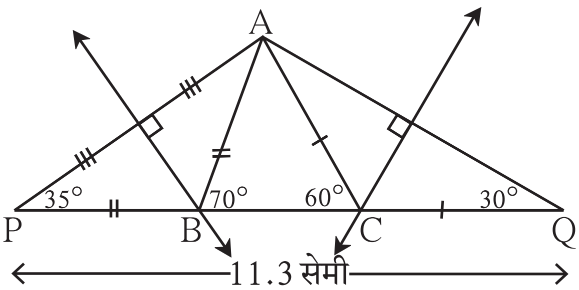
1. Δ XYZ असा काढा की YZ = 7.4 सेमी. m$\angle$XYZ = 45° आणि XY – XZ = 2.7 सेमी.
2. Δ PQR असा काढा की QR = 6.5 सेमी. m$\angle$PQR = 40° आणि PQ – PR = 2.5 सेमी.
3. Δ ABC असा काढा की BC = 6 सेमी. m$\angle$ABC = 100° आणि AC – AB = 2.5 सेमी.

रचना III

त्रिकोणाची परिमिती आणि पायालगतचे दोन्ही कोन दिले असता त्रिकोण काढणे.

उदा. Δ ABC मधील AB + BC + CA = 11.3 सेमी, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$ तर Δ ABC काढा.

उकल : कच्ची आकृती काढू.



कच्ची आकृती 4.11

स्पष्टीकरण : या आकृतीत रेख BC वर बिंदू P व Q असे घेतले की,

PB = AB, CQ = AC

$\therefore$ PQ = PB + BC + CQ = AB + BC +AC = 11.3 सेमी.

आता ΔPBA मध्ये PB = BA

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB$ आणि $\angle APB + \angle PAB$ = बाह्यकोन ABC = 70°. . . . (दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय)

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB = 35°$ त्याचप्रमाणे $\angle CQA = \angle CAQ = 30°$

आता PAQ हा त्रिकोण काढता येईल, कारण त्याचे दोन कोन व समाविष्ट बाजू PQ माहीत आहेत.

मग BA = BP $\therefore$ बिंदू B रेख AP च्या लंबदुभाजकावर आहे व CA = CQ

$\therefore$ बिंदू C रेख AQ च्या लंबदुभाजकावर आहे.

$\therefore$ AP व AQ चे लंबदुभाजक काढा व ते रेषा PQ ला जेथे छेदतील तेथे अनुक्रमे B आणि C बिंदू मिळतात.

रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेख PQ हा 11.3 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा.

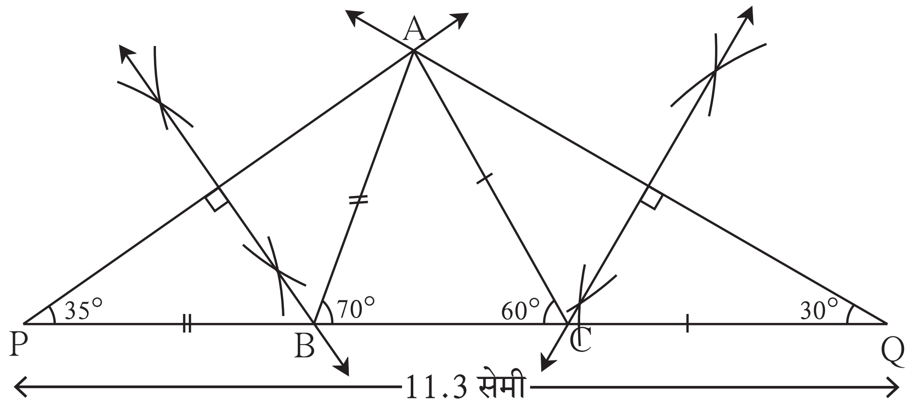
(2) बिंदू P पाशी 35° मापाचा कोन करणारा किरण काढा.

(3) बिंदू Q पाशी 30° मापाचा कोन करणारा किरण काढा.

(4) दोन्ही किरणांच्या छेदनबिंदूला A हे नाव द्या.

(5) रेख AP व रेख AQ चे लंबदुभाजक काढा. ते रेषा PQ ला ज्या बिंदूंत छेदतील त्यांना अनुक्रमे B आणि C ही नावे द्या.

(6) रेख AB आणि रेख AC काढा. Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्की आकृती 4.12

सरावसंच 4.3

1. Δ PQR असा काढा, की $\angle Q = 70^\circ$, $\angle R = 80^\circ$ आणि PQ + QR + PR = 9.5 सेमी.
2. Δ XYZ असा काढा, की $\angle Y = 58^\circ$, $\angle X = 46^\circ$ आणि त्रिकोणाची परिमिती 10.5 सेमी असेल.
3. Δ LMN असा काढा, की $\angle M = 60^\circ$, $\angle N = 80^\circ$ आणि LM + MN + NL = 11 सेमी.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. Δ XYZ असा काढा की XY + XZ = 10.3 सेमी, YZ = 4.9 सेमी, $\angle XYZ = 45^\circ$
2. Δ ABC असा काढा की $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, AB + BC + AC = 11.2 सेमी.
3. ज्या त्रिकोणाची परिमिती 14.4 सेमी आहे आणि ज्याच्या बाजूंचे गुणोत्तर 2:3:4 आहे, असा त्रिकोण काढा.
4. Δ PQR असा काढा की PQ − PR = 2.4 सेमी, QR = 6.4 सेमी आणि $\angle PQR = 55^\circ$.

ICT Tools or Links

संगणकावर या त्रिकोण रचना जिओजिब्रा या सॉफ्टवेअरच्या साहाय्याने करून पाहाव्यात व आनंद घ्यावा. रचना क्रमांक 3 ही या सॉफ्टवेअरमध्ये वेगळ्याप्रकारे करून दाखवली आहे, ती रीतही अभ्यासावी.