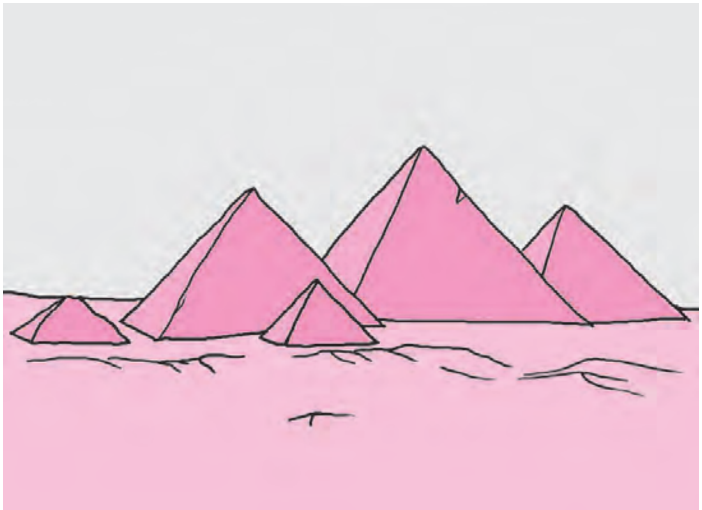
1 भूमितीतील मूलभूत संबोध

443GHP

चला, शिकूया.

- बिंदू, रेषा व प्रतल
- बिंदूचे निर्देशक व अंतर
- दरम्यानता
- सशर्त विधाने
- सिद्धता



शेजारील चित्र ओळखले का ? इजिप्त मधील पिरॅमिडचे हे चित्र आहे. इ.स.पूर्व 3000 या काळात एवढ्या प्रचंड रचना पूर्वीच्या लोकांनी कशा केल्या असतील ? स्थापत्य शास्त्र आणि भूमिती या क्षेत्रांमध्ये विकास झाल्याखेरीज अशा रचना होऊ शकत नाहीत.

भूमिती या नावावरूनच त्या शास्त्राचा उगम समजतो. 'भू' म्हणजे जमीन आणि 'मिती' म्हणजे मापन. यांवरून जमीन मोजण्याच्या गरजेतून हा विषय निर्माण झाला असावा.

अनेक देशांत भूमितीचा विकास वेगवेगळ्या काळांत व वेगवेगळ्या रचनांसाठी झाला. थेल्स हा आद्य ग्रीक गणितज्ञ इजिप्तमध्ये गेला होता तेव्हा त्याने पिरॅमिडची सावली मोजून व समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म वापरून पिरॅमिडची उंची ठरवली अशी कथा आहे. पायथागोरस हा थेल्सचा विद्यार्थी होता असेही सांगितले जाते.

प्राचीन भारतीयांना देखील भूमिती या विषयाचे सखोल ज्ञान होते. वैदिक काळात भारतीय लोक यज्ञकुंडाची रचना करण्यासाठी भूमितीय गुणधर्मांचा उपयोग करत होते. दोरीच्या साहाय्याने मापन कसे करावे व विविध आकार कसे तयार करावेत याचा उल्लेख शुल्वसूत्रात आढळतो. नंतरच्या काळात आर्यभट, वराहमिहीर, ब्रह्मगुप्त, भास्कराचार्य इत्यादी गणितज्ञांनी या विषयात मोलाची भर घातली.

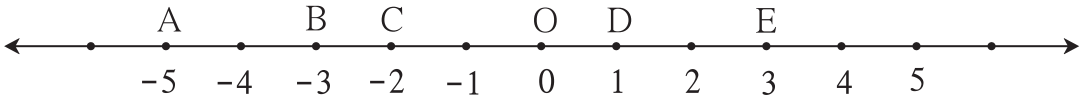
जाणून घेऊया.

भूमितीतील मूलभूत संबोध : बिंदू, रेषा व प्रतल
(Basic concepts in geometry : point, line and plane)

ज्याप्रमाणे आपण संख्यांची व्याख्या करत नाही त्याप्रमाणे बिंदू, रेषा व प्रतल यांच्या व्याख्या केल्या जात नाहीत. भूमितीतील हे काही मूलभूत संबोध आहेत. रेषा व प्रतल हे बिंदूंचे संच आहेत. रेषा म्हणजेच सरळ रेषा असते, हे ध्यानात ठेवा.

बिंदूंचे निर्देशक व अंतर (Co-ordinates of points and distance)

खालील संख्यारेषा पाहा.



आकृती 1.1

येथे D हा बिंदू रेषेवरील 1 ही संख्या दाखवतो. म्हणजे 1 ही संख्या बिंदू D चा **निर्देशक** आहे असे म्हणतात. B बिंदू हा संख्यारेषेवर −3 ही संख्या दर्शवतो म्हणून बिंदू B चा निर्देशक −3 हा आहे. त्याचप्रमाणे A चा निर्देशक −5 व E चा निर्देशक 3 आहे.

D बिंदूपासून E बिंदू हा 2 एकक अंतरावर आहे म्हणजेच E व D या बिंदूंमधील अंतर 2 आहे. येथे एकके मोजून आपण दोन बिंदूंमधील अंतर काढू शकतो. या संख्यारेषेवरील A व B बिंदूंमधील अंतरही 2 आहे.

आता बिंदूंच्या निर्देशकांचा उपयोग करून अंतर कसे काढायचे हे पाहू.

दोन बिंदूंमधील अंतर काढणे म्हणजे त्या बिंदूंच्या निर्देशकांपैकी मोठ्या निर्देशकातून लहान निर्देशक वजा करणे.

D बिंदूचा निर्देशक 1 आहे, E चा निर्देशक 3 आहे आणि $3 > 1$ हे आपल्याला माहीत आहे.

बिंदू E व D मधील अंतर $3-1$ म्हणजे 2 आहे.

बिंदू E व D यांमधील अंतर हे d (E,D) असे दर्शवतात. हे अंतर म्हणजेच l(ED), ही रेख ED ची लांबी होय.

$d(E, D) = 3 - 1 = 2$

$\therefore\ l(ED) = 2$

$d(E, D) = l(ED) = 2$

तसेच $d(D, E) = 2$

$d(C, D) = 1 - (-2)$

$= 1 + 2 = 3$

$\therefore\ d(C, D) = l(CD) = 3$

तसेच $d(D, C) = 3$

d(A,B) काढू. A चा निर्देशक −5 आहे, B चा निर्देशक −3 आहे आणि $-3 > -5$

$\therefore\ d(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2.$

वरील सर्व उदाहरणांत दिसून येते, की दोन भिन्न बिंदूंमधील अंतर ही धन संख्या असते. तसेच P, Q एकच बिंदू असतील तर $d(P, Q) = 0$, हे ध्यानात घ्या.

हे लक्षात ठेवूया.

- दोन बिंदूंमधील अंतर हे त्यांच्या निर्देशकांपैकी मोठ्या निर्देशकातून लहान निर्देशक वजा केल्यावर मिळते.
- कोणत्याही दोन बिंदूंमधील अंतर ही ऋणेतर वास्तव संख्या असते.

जाणून घेऊया.

दरम्यानता (Betweenness)

जर P, Q, R हे एकरेषीय भिन्न बिंदू असतील तर खाली दिल्याप्रमाणे तीन शक्यता संभवतात.

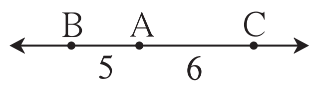
आकृती 1.2

(i) बिंदू Q हा P आणि R यांच्या दरम्यान असेल. (ii) बिंदू R हा P आणि Q यांच्या दरम्यान असेल. (iii) बिंदू P हा R आणि Q यांच्या दरम्यान असेल.

जर d (P, Q) + d (Q, R) = d (P, R) असेल तर Q हा बिंदू P आणि R च्या दरम्यान आहे असे म्हणतात. ही दरम्यानता P - Q - R अशी दर्शवतात.

उदा (1) एका संख्यारेषेवर A, B आणि C हे बिंदू असे आहेत, की d (A, B) = 5, d (B,C) = 11 आणि d (A, C) = 6, तर त्यांपैकी कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान असेल ?

उकल : येथे A, B आणि C यांपैकी कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे हे खालीलप्रमाणे ठरवता येईल.



आकृती 1.3

d(B,C) = 11 . . . . (I)

d(A,B) + d(A,C)= 5+6 = 11 . . . . (II)

$\therefore$ d (B, C) = d (A, B) + d (A, C) . . . . (I) आणि (II) वरून

म्हणजे बिंदू A हा बिंदू B व बिंदू C च्या दरम्यान आहे.

उदा (2) एका रस्त्यावर सरळ रेषेत U, V व A ही शहरे आहेत. U व A यांमधील अंतर 215 किमी, V व A यांमधील अंतर 140 किमी आणि U व V यांमधील यांतील अंतर 75 किमी आहे. तर कोणते शहर कोणत्या दोन शहरांच्या दरम्यान आहे ?

उकल : d (U,A) = 215; d (V,A) = 140; d (U,V) = 75

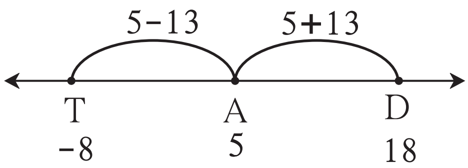
d (U,V) + d (V,A) = 75 + 140 = 215; d (U,A) = 215

$\therefore$ d (U,A) = d (U,V) + d (V,A)

$\therefore$ V हे शहर U व A या शहरांच्या दरम्यान आहे.

उदा (3) एका संख्यारेषेवरील A बिंदूचा निर्देशक 5 आहे. तर त्याच रेषेवरील A पासून 13 एकक अंतरावरील बिंदूंचे निर्देशक काढा.

उकल : संख्यारेषेवर A पासून 13 एकक अंतरावर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे A च्या डावीकडे T व उजवीकडे D असे दोन बिंदू घेऊ.



आकृती 1.4

बिंदू A च्या डावीकडील बिंदू T चा निर्देशक $5 - 13 = -8$ असेल.

बिंदू A च्या उजवीकडील बिंदू D चा निर्देशक $5 + 13 = 18$ असेल.

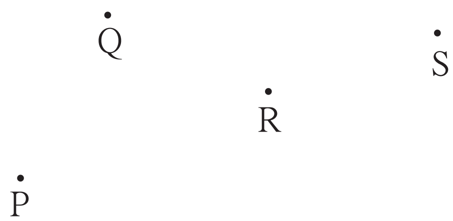
$\therefore$ बिंदू A पासून 13 एकक अंतरावरील बिंदूंचे निर्देशक −8 आणि 18 असतील.

पडताळून पाहा : $d(A,D) = d(A,T) = 13$

कृती :

(1) शेजारील आकृतीत दिलेले A, B, C हे बिंदू एकरेषीय आहेत का, हे दोरा ताणून धरून तपासा. ते एका रेषेत असल्यास कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे ते लिहा.

(2) शेजारील आकृतीत दिलेले P, Q, R, S हे चार बिंदू आहेत. त्यांपैकी कोणते तीन बिंदू एकरेषीय आहेत व कोणते तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत ते तपासा. एकरेषीय असणाऱ्या तीन बिंदूंमधील दरम्यानता लिहा.

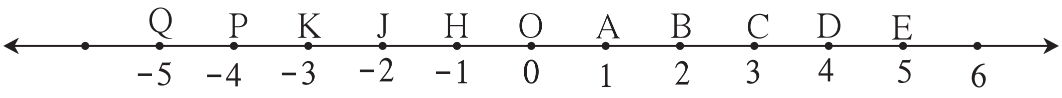


(3) कवायतीसाठी मुलांना सरळ ओळींमध्ये उभे राहण्यास सांगितले आहे. प्रत्येक ओळीतील मुले सरळ रेषेत आहेत का हे कसे तपासाल ?

(4) प्रकाशकिरण एका सरळ रेषेत जातात हे तुम्ही कसे पडताळले होते ? आधीच्या इयत्तेत केलेला विज्ञानातील प्रयोग आठवा.

सरावसंच 1.1

1. खाली दिलेल्या संख्यारेषेच्या आधारे पुढील अंतरे काढा.



आकृती 1.5

(i) d(B,E) (ii) d(J, A) (iii) d(P, C) (iv) d(J, H)

(v) d(K, O) (vi) d(O, E) (vii) d(P, J) (viii) d(Q, B)

2. बिंदू A चा निर्देशक x आणि बिंदू B चा निर्देशक y आहे. तर खालील बाबतीत d(A, B) काढा.

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$

(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

3. खाली दिलेल्या माहितीवरून कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे ते ठरवा. दिलेले बिंदू एकरेषीय नसतील तर तसे लिहा.

(i) d(P, R) = 7, d(P, Q) = 10, d(Q, R) = 3

(ii) d(R, S) = 8, d(S, T) = 6, d(R, T) = 4

(iii) d(A, B) = 16, d(C, A) = 9, d(B, C) = 7

(iv) d(L, M) = 11, d(M, N) = 12, d(N, L) = 8

(v) d(X, Y) = 15, d(Y, Z) = 7, d(X, Z) = 8

(vi) d(D, E) = 5, d(E, F) = 8, d(D, F) = 6

4. एका संख्यारेषेवर A, B, C हे बिंदू असे आहेत की, d(A,C) = 10, d(C,B) = 8 तर d(A, B) काढा. सर्व पर्यायांचा विचार करा.

5. X, Y, Z हे एकरेषीय बिंदू आहेत, d(X,Y) = 17, d(Y,Z) = 8 तर d(X,Z) काढा.

6. आकृती काढून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) जर A-B-C आणि l(AC) = 11, l(BC) = 6.5, तर l(AB) = ?

(ii) जर R-S-T आणि l(ST) = 3.7, l(RS) = 2.5, तर l(RT) = ?

(iii) जर X-Y-Z आणि l(XZ) = $3\sqrt{7}$, l(XY) = $\sqrt{7}$, तर l(YZ) = ?

7. एकरेषीय नसलेले तीन बिंदू कोणती आकृती तयार करतात ?

जाणून घेऊया.

इयत्ता नववीच्या गणित भाग I मध्ये 'संच' या प्रकरणात आपण संयोगसंच, छेदसंच यांचा अभ्यास केला आहे. याचा उपयोग करून रेषाखंड, किरण, रेषा यांचे वर्णन बिंदूसंच रूपात करू.

(1) **रेषाखंड (Line segment) :**

बिंदू A, बिंदू B आणि या दोन बिंदूंच्या दरम्यानचे सर्व बिंदू यांचा संयोगसंच म्हणजे रेषाखंड AB असतो.

रेषाखंड AB हे थोडक्यात रेख AB असे लिहितात.

रेख AB म्हणजेच रेख BA.

बिंदू A व बिंदू B हे रेख AB चे अंत्यबिंदू आहेत.

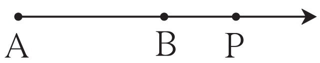
आकृती 1.6

रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंमधील अंतराला त्या रेषाखंडाची लांबी म्हणतात. $l(AB) = d(A,B)$

$l(AB) = 5$ हे $AB = 5$ असेही लिहितात.

(2) **किरण AB (Ray AB) :**

समजा A आणि B हे दोन भिन्न बिंदू आहेत. रेख AB वरील बिंदू आणि A-B-P असे सर्व बिंदू P यांचा संयोगसंच म्हणजे किरण AB होय. येथे बिंदू A ला किरणाचा आरंभबिंदू म्हणतात.



आकृती 1.7

(3) **रेषा AB (Line AB) :**

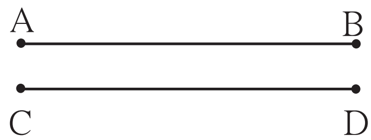
किरण AB चा बिंदूसंच आणि त्याच्या विरूद्ध किरणाचा बिंदूसंच मिळून जो संयोगसंच तयार होतो तो म्हणजे रेषा AB हा बिंदूसंच आहे.

रेख AB चा बिंदूसंच हा रेषा AB च्या बिंदूसंचाचा उपसंच आहे.

(4) **एकरूप रेषाखंड (Congruent segments) :**

जर दिलेल्या दोन रेषाखंडांची लांबी समान असेल तर ते रेषाखंड एकरूप असतात.

जर $l(AB) = l(CD)$ तर रेख AB $\cong$ रेख CD



आकृती 1.8

(5) **रेषाखंडांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म (Properties of congruent segements) :**

(i) परावर्तनता (Reflexivity) रेख AB $\cong$ रेख AB

(ii) सममितता (Symmetry) जर रेख AB $\cong$ रेख CD तर रेख CD $\cong$ रेख AB

(iii) संक्रामकता (Transitivity) जर रेख AB $\cong$ रेख CD व रेख CD $\cong$ रेख EF तर रेख AB $\cong$ रेख EF

(6) **रेषाखंडाचा मध्यबिंदू (Midpoint of a segment) :**

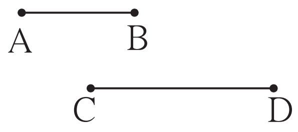
जर A-M-B आणि रेख AM $\cong$ रेख MB, तर M बिंदू हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे असे म्हणतात. प्रत्येक रेषाखंडाला एक आणि एकच मध्यबिंदू असतो.

आकृती 1.9

(7) **रेषाखंडांची तुलना (Comparison of segments) :**

रेख AB ची लांबी रेख CD पेक्षा कमी असेल, म्हणजेच जर $l(AB) < l(CD)$ तर रेख AB < रेख CD किंवा रेख CD > रेख AB असे लिहितात.

रेषाखंडाचा लहान-मोठेपणा हा त्यांच्या लांबीवर अवलंबून असतो.



आकृती 1.10

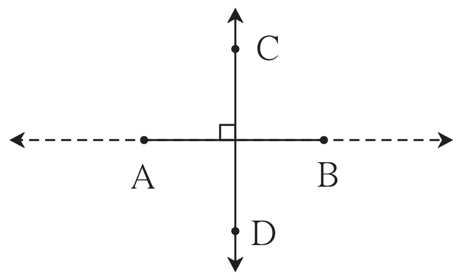
(8) **रेषाखंडांची किंवा किरणांची लंबता**

(Perpendicularity of segments or rays) :

दोन रेषाखंड, दोन किरण किंवा एक किरण व एक रेषाखंड यांना सामावणाऱ्या रेषा जर परस्परांना लंब असतील तर ते दोन रेषाखंड, ते दोन किरण किंवा एक किरण आणि एक रेषाखंड परस्परांना लंब आहेत असे म्हणतात.

आकृती 1.11 मध्ये रेख AB $\perp$ रेषा CD,

रेख AB $\perp$ किरण CD.



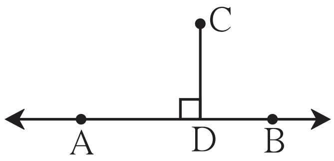
आकृती 1.11

(9) **बिंदूचे रेषेपासूनचे अंतर (Distance of a point from a line) :**

जर रेख CD $\perp$ रेषा AB आणि बिंदू D हा रेषा AB वर असेल तर रेख CD च्या लांबीला बिंदू C चे रेषा AB पासूनचे अंतर असे म्हणतात.

बिंदू D ला CD या लंबाचा **लंबपाद** म्हणतात.

जर $l(CD) = a$, तर C बिंदू रेषा AB पासून a अंतरावर आहे असे म्हणतात.



आकृती 1.12

सरावसंच 1.2

1. खालील सारणीत संख्यारेषेवरील बिंदूंचे निर्देशक दिले आहेत. त्यावरून पुढील रेषाखंड एकरूप आहेत का ते ठरवा.

बिंदू	A	B	C	D	E
निर्देशक	–3	5	2	–7	9

(i) रेख DE व रेख AB (ii) रेख BC व रेख AD (iii) रेख BE व रेख AD

2. बिंदू M हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे आणि AB = 8 तर AM = किती?

3. बिंदू P हा रेख CD चा मध्यबिंदू आहे आणि CP = 2.5 तर रेख CD ची लांबी काढा.

4. जर AB = 5 सेमी, BP = 2 सेमी आणि AP = 3.4 सेमी तर या रेषाखंडांचा लहान-मोठेपणा ठरवा.

5. आकृती 1.13 च्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) किरण RP च्या विरुद्ध किरणाचे नाव लिहा.

(ii) किरण PQ व किरण RP यांचा छेदसंच लिहा.

(iii) रेख PQ व रेख QR चा संयोग संच लिहा.

(iv) रेख QR हा कोणकोणत्या किरणांचा उपसंच आहे ?

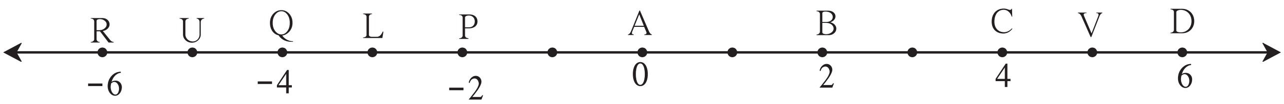
(v) R हा आरंभबिंदू असलेल्या विरूद्ध किरणांची जोडी लिहा.

(vi) S हा आरंभबिंदू असलेले कोणतेही दोन किरण लिहा.

(vii) किरण SP आणि किरण ST यांचा छेदसंच लिहा.

आकृती 1.13

6. खालील आकृती 1.14 च्या आधारे प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 1.14

(i) बिंदू B पासून समदूर असणारे बिंदू कोणते ?

(ii) बिंदू Q पासून समदूर असणाऱ्या बिंदूंची एक जोडी लिहा.

(iii) d (U,V), d (P,C), d (V,B), d (U, L) काढा.

जाणून घेऊया.

सशर्त विधाने आणि व्यत्यास (Conditional statements and converse)

जी विधाने जर-तर रूपांत लिहिता येतात त्यांना सशर्त विधाने असे म्हणतात. सशर्त विधानांतील 'जर' ने सुरू होणाऱ्या विधानास पूर्वांग (पूर्वार्ध)आणि 'तर' ने सुरू होणाऱ्या विधानास उत्तरांग (उत्तरार्ध) असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात. हे विधान आहे.

सशर्त विधान : जर दिलेला चौकोन समभुज चौकोन असेल तर त्याचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

एखादे सशर्त विधान दिले असेल आणि त्यातील पूर्वांग व उत्तरांग यांची अदलाबदल केली तर मिळणारे नवे विधान हे मूळ विधानाचा **व्यत्यास** (Converse) आहे असे म्हणतात.

एखादे सशर्त विधान सत्य असेल तर त्याचा व्यत्यास हा सत्य असतोच असे नाही. पुढील उदाहरणे पाहा.

सशर्त विधान : जर एखादा चौकोन समभुज असेल तर त्याचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

व्यत्यास : जर एखाद्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतील तर तो चौकोन समभुज असतो.
या उदाहरणात मूळ विधान व त्याचा व्यत्यास हे दोन्हीही सत्य आहेत.

सशर्त विधान : जर एखादी संख्या ही मूळ संख्या असेल तर ती सम किंवा विषम असते.

व्यत्यास : जर एखादी संख्या सम किंवा विषम असेल तर ती मूळ संख्या असते.
या उदाहरणात मूळ विधान सत्य आहे पण व्यत्यास असत्य आहे.

जाणून घेऊया.

सिद्‌धता (Proofs)

आपण कोन, त्रिकोण, चौकोन या आकृत्यांच्या अनेक गुणधर्मांचा अभ्यास केला आहे. हे गुणधर्म आपण प्रायोगिक पद्‌धतीने शिकलो. या इयत्तेत आपण भूमिती या विषयाकडे वेगळ्या दृष्टिकोनातून पाहणार आहोत. या दृष्टिकोनाचे श्रेय इसवी सनापूर्वी तिसऱ्या शतकात होऊन गेलेल्या ग्रीक गणिती युक्लिड यांच्याकडे जाते. भूमिती विषयाची त्या काळात जी माहिती होती, तिचे सुसंबद्ध संकलन यांनी केले. त्यात सुसूत्रता आणली. त्यांनी प्रामुख्याने असे दाखवले की, काही स्वयंसिद्ध व सर्वमान्य विधाने **गृहीतके** (Postulates) म्हणून स्वीकारली, तर त्यांच्या आधारावर तर्कशुद्ध मांडणीने नवीन गुणधर्म सिद्ध करता येतात. सिद्ध केलेल्या गुणधर्मांना **प्रमेये** (Theorems) म्हणतात.

युक्लिड यांनी मांडलेल्या गृहीतकांपैकी काही गृहीतके खाली दिली आहेत.

(1) एका बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा असतात.

(2) दोन बिंदूतून एक आणि एकच रेषा जाते.

(3) कोणताही बिंदू केंद्र मानून दिलेल्या त्रिज्येचे वर्तुळ काढता येते.

(4) सर्व काटकोन परस्परांशी एकरूप असतात.

(5) दोन रेषा व त्यांची छेदिका काढली असता एका बाजूला तयार झालेल्या आंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षा कमी असेल तर त्या रेषा त्याच दिशेने वाढवल्यावर एकमेकींना छेदतात.

युक्लिड

यांतील काही गृहीतके आपण कृतीने पडताळून पाहिली आहेत.

एखाद्या गुणधर्माची तर्कशुद्ध सिद्‌धता देता येत असेल तर तो गुणधर्म सत्य मानला जातो. त्यासाठी केलेल्या तर्कशुद्ध मांडणीला त्या गुणधर्माची, म्हणजेच त्या प्रमेयाची **सिद्‌धता** (Proof) म्हणतात.

एखादे सशर्त विधान सत्य आहे असे आपल्याला सिद्ध करायचे असते, तेव्हा त्यातील पूर्वांगाला **पक्ष** आणि उत्तरांगाला **साध्य** म्हणतात.

सिद्‌धतेचे **प्रत्यक्ष** आणि **अप्रत्यक्ष** असे दोन प्रकार आहेत.

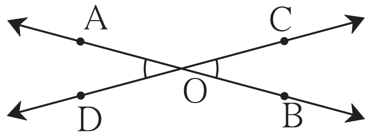
एकमेकांना छेदणाऱ्या दोन रेषांनी केलेल्या कोनांच्या गुणधर्माची **प्रत्यक्ष सिद्‌धता** देऊ.

प्रमेय : दोन रेषा एकमेकींना छेदल्यास होणारे परस्पर विरुद्ध कोन समान मापाचे असतात.

पक्ष : रेषा AB आणि रेषा CD या परस्परांना O बिंदूत छेदतात. A – O – B, C – O – D

साध्य : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$



आकृती 1.15

सिद्धता : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ . . . . (I) रेषीय जोडीतील कोन

$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ . . . . (II) रेषीय जोडीतील कोन

$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ . . . . विधान (I)व (II) वरून

$\therefore\ \angle AOC = \angle BOD$. . . . . . . $\angle BOC$ चा लोप करून.

याचप्रमाणे $\angle BOC = \angle AOD$ सिद्ध करता येईल.

अप्रत्यक्ष सिद्धता (Indirect proof) :

या पद्धतीत सुरुवातीस साध्य असत्य आहे असे गृहीत धरतात. त्या आधारे केवळ तर्काच्या आणि आधी मान्य झालेल्या सत्यांच्या आधारे पायरी पायरीने एका निष्कर्षापर्यंत पोहोचतात. हा निष्कर्ष माहीत असलेल्या सत्य गुणधर्माशी किंवा पक्षाशी, म्हणजेच दिलेल्या माहितीशी विसंगत असतो. त्यामुळे साध्य असत्य आहे हे मानणे चुकीचे आहे असा निष्कर्ष काढावा लागतो. म्हणजेच साध्य सत्य आहे हे स्वीकारले जाते. खालील उदाहरण अभ्यासा.

विधान : दोनपेक्षा मोठी असणारी मूळ संख्या विषम असते.

सशर्त विधान : जर p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या असेल तर p ही विषम संख्या असते.

पक्ष : p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या आहे. म्हणजेच p चे 1 व p हे दोनच विभाजक आहेत.

साध्य : p ही विषम संख्या आहे.

सिद्धता : p ही संख्या विषम नाही असे मानू.

म्हणजे p ही सम संख्या आहे.

$\therefore$ 2 हा p चा विभाजक आहे ..... (I)

पण p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या दिलेली आहे. ....(पक्ष)

$\therefore$ p चे 1 व p हे दोनच विभाजक आहेत. ..... (II)

विधान (I) व (II) वरून पक्षाशी विसंगती येते.

म्हणून मानलेले विधान चूक आहे.

म्हणजे p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या असेल तर ती संख्या विषम आहे हे सिद्ध होते.

सरावसंच 1.3

1. खालील विधाने जर-तर रूपांत लिहा.
   (i) समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.
   (ii) आयताचे कर्ण एकरूप असतात.
   (iii) समद्विभुज त्रिकोणात शिरोबिंदू व पायाचा मध्यबिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड पायाला लंब असतो.
2. पुढील विधानांचे व्यत्यास लिहा.
   (i) दोन समांतर रेषा व त्यांची छेदिका दिली असता होणारे व्युत्क्रम कोन एकरूप असतात.
   (ii) दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या आंतरकोनांची एक जोडी पूरक असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
   (iii) आयताचे कर्ण एकरूप असतात.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

   (i) प्रत्येक रेषाखंडाला किती मध्यबिंदू असतात ?
   (A) एकच (B) दोन (C) तीन (D) अनेक

   (ii) दोन भिन्न रेषा परस्परांना छेदतात तेव्हा त्यांच्या छेदसंचात किती बिंदू असतात ?
   (A) अनंत (B) दोन (C) एक (D) एकही नाही

   (iii) तीन भिन्न बिंदूंना समाविष्ट करणाऱ्या किती रेषा असतात ?
   (A) दोन (B) तीन (C) एक किंवा तीन (D) सहा

   (iv) बिंदू A चा निर्देशक -2 व B चा निर्देशक 5 असेल तर $d(A,B) =$ किती ?
   (A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

   (v) जर P-Q-R आणि $d(P,Q) = 2$, $d(P,R) = 10$, तर $d(Q,R) =$ किती ?
   (A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

2. संख्यारेषेवरील P,Q,R या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे $3, -5$ व 6 आहेत, तर खालील विधाने सत्य आहेत की असत्य ते लिहा.

   (i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$
   (iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

3. खाली काही बिंदूंच्या जोड्यांचे निर्देशक दिले आहेत. त्यावरून प्रत्येक जोडीतील अंतर काढा.

   (i) 3, 6 (ii) $-9, -1$ (iii) $-4, 5$ (iv) $0, -2$
   (v) $x + 3, x - 3$ (vi) $-25, -47$ (vii) $80, -85$

4. संख्यारेषेवर P बिंदूचा निर्देशक -7 आहे तर P पासून 8 एकक अंतरावर असणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

5. दिलेल्या माहितीनुसार खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

   (i) जर A-B-C व $d(A,C) = 17$, $d(B,C) = 6.5$ तर $d(A,B) = ?$

   (ii) जर P-Q-R व $d(P,Q) = 3.4$, $d(Q,R) = 5.7$ तर $d(P,R) = ?$

6. संख्यारेषेवर A बिंदूचा निर्देशक 1 आहे. A पासून 7 एकक अंतरावरील बिंदूंचे निर्देशक काढा.

7. पुढील विधाने सशर्त रूपात लिहा.

   (i) प्रत्येक समभुज चौकोन हा चौरस असतो.

   (ii) रेषीय जोडीतल कोन परस्परांचे पूरक असतात.

   (iii) त्रिकोण ही तीन रेषाखंडांनी तयार झालेली आकृती असते.

   (iv) केवळ दोनच विभाजक असलेल्या संख्येला मूळ संख्या म्हणतात.

8. पुढील विधानांचे व्यत्यास लिहा.

   (i) जर एखाद्या बहुभुजाकृतीच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असेल तर ती आकृती त्रिकोण असते.

   (ii) दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90^0 असेल तर ते परस्परांचे कोटिकोन असतात.

   (iii) दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता होणारे संगत कोन एकरूप असतात.

   (iv) संख्येतील अंकांच्या बेरजेला 3 ने भाग जात असेल तर त्या संख्येला 3 ने भाग जातो.

9. पुढील विधानांतील पक्ष व साध्य लिहा.

   (i) जर त्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकरूप असतील तर त्याचे तीनही कोन एकरूप असतात.

   (ii) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

10*. खालील विधानांसाठी नामनिर्देशित आकृती काढून त्यावरून पक्ष, साध्य लिहा.

   (i) दोन समभुज त्रिकोण, समरूप असतात.

   (ii) जर रेषीय जोडीतील कोन एकरूप असतील तर त्यांपैकी प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

   (iii) त्रिकोणाच्या दोन बाजूंवर काढलेले शिरोलंब जर एकरूप असतील तर त्या दोन बाजू एकरूप असतात.