

6

बैजिक राशींचे अवयव



जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण $ax + ay$ आणि $a^2 - b^2$ या रूपातील बैजिक राशींचे अवयव अभ्यासले आहेत.

उदाहरणार्थ, (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

$$(2) p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$$



जाणून घेऊया.

वर्ग त्रिपदीचे अवयव (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ या स्वरूपाच्या बैजिक राशीला वर्ग त्रिपदी म्हणतात.

आपल्याला हे माहित आहे की $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore x^2 + (a + b)x + ab$ चे $(x + a)$ व $(x + b)$ हे अवयव आहेत.

$x^2 + 5x + 6$ या वर्ग त्रिपदीचे अवयव काढण्यासाठी तिची तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$

या त्रिपदीशी करून, $a + b = 5$ आणि $ab = 6$. म्हणून 6 चे असे अवयव पाडू की त्यांची बेरीज 5 येईल

आणि त्रिपदी $x^2 + (a + b)x + ab$ या रूपात लिहून तिचे अवयव पाडू.

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2 \quad \dots\dots\dots x^2 + (a + b)x + ab$$

$$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3} \quad \dots\dots\dots (3 + 2) \text{ ला } x \text{ ने गुणू. मिळालेल्या}$$

चार पदांचे दोन गट पाडू व अवयव मिळवू.

$$= x(x + 3) + 2(x + 3) \quad = (x + 3)(x + 2)$$

दिलेल्या वर्गत्रिपदीचे अवयव पाडण्यासाठी खालील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) $2x^2 - 9x + 9$ चे अवयव पाडा.

उकल : वर्गपदाचा सहगुणक व स्थिरपदी यांचा गुणाकार करू येथे तो गुणाकार $2 \times 9 = 18$ आहे.

आता 18 चे असे अवयव पाडू की त्यांची बेरीज

मधल्या पदाच्या सहगुणकाएवढी, म्हणजे -9 येईल.

$$18 = (-6) \times (-3) ; (-6) + (-3) = -9$$

$-9x$ हे पद $-6x - 3x$ असे लिहू

$$2x^2 - 9x + 9$$

$$= 2x^2 - 6x - 3x + 9$$

$$= 2x(x - 3) - 3(x - 3)$$

$$= (x - 3)(2x - 3)$$

$$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$$

उदा. (2) $2x^2 + 5x - 18$ चे अवयव पाडा.

उकल : $2x^2 + 5x - 18$

$$= \underline{2x^2 + 9x} - \underline{4x - 18}$$

$$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$$

$$= (2x + 9)(x - 2)$$

उदा. (3) $x^2 - 10x + 21$ चे अवयव पाडा.

उकल : $x^2 - 10x + 21$

$$= \underline{x^2 - 7x} - \underline{3x + 21}$$

$$= x(x - 7) - 3(x - 7)$$

$$= (x - 7)(x - 3)$$

उदा. (4) $2y^2 - 4y - 30$ चे अवयव पाडा.

उकल : $2y^2 - 4y - 30$

$$= 2(y^2 - 2y - 15) \quad \dots\dots\dots \text{सर्व पदांमधून 2 हा सामाईक अवयव काढून}$$

$$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15}) \quad \dots\dots\dots$$

$$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$$

$$= 2(y - 5)(y + 3)$$

सरावसंच 6.1

1. अवयव पाडा.

(1) $x^2 + 9x + 18$

(2) $x^2 - 10x + 9$

(3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$

(5) $p^2 - 2p - 35$

(6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$

(8) $m^2 - 25m + 100$

(9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$

(11) $20x^2 - 26x + 8$

(12) $44x^2 - x - 3$



$a^3 + b^3$ चे अवयव (Factors of $a^3 + b^3$)

आपणांस माहित आहे की, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

उजव्या बाजूकडील राशीतून $3ab$ सामाईक घेऊन या विस्तारसूत्राची मांडणी पुढीलप्रमाणेही करता येते.

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

आता, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3 \dots\dots\dots$ बाजूची अदलाबदल करून.

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore \boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

दोन घनांच्या बेरजेच्या अवयवांच्या वरील सूत्राचा उपयोग करून काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y) [x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y) [x^2 - 3xy + 9y^2]$$

उदा. (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q) [(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q) (4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

उदा. (3) $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$

$$= \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$$

उदा. (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$$= 2[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q) (25p^2 - 30pq + 36q^2)$$

सरावसंच 6.2

1. अवयव पाडा. (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$
 (5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$



$a^3 - b^3$ चे अवयव (Factors of $a^3 - b^3$)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$\text{आता, } a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \\ &= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b)] \\ &= (a - b) [(a - b)^2 + 3ab] \\ &= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) \\ &= (a - b) (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

दोन घनांच्या वजाबाकीचे अवयव पाडण्याचे सूत्र वापरून काही राशींचे अवयव पाडू.

उदा. (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - 8y^3 &= x^3 - (2y)^3 \\ &= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) \end{aligned}$$

उदा. (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$
 $= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

उदा. (5) सोपे रूप द्या : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

उकल : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

उदा. (6) सोपे रूप द्या : $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

उकल : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ या सूत्रावरून

$$\begin{aligned} \therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3 &= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2] \\ &= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2] \\ &= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3 \end{aligned}$$



हे मला समजले.

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

सरावसंच 6.3

1. अवयव पाडा. (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. सोपे रूप द्या. (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$



गुणोत्तरीय बैजिक राशी (Rational algebraic expressions)

A आणि B या दोन बैजिक राशी असतील तर $\frac{A}{B}$ या राशीला गुणोत्तरीय बैजिक राशी म्हणतात. गुणोत्तरीय बैजिक राशींना सोपे रूप देताना कराव्या लागणाऱ्या बेरीज वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इत्यादी क्रिया, परिमेय संख्यांवरील क्रियांप्रमाणेच असतात. बैजिक राशींचे भागाकार करताना छेद किंवा भाजक शून्य असू शकत नाही हे ध्यानात घ्या.

उदा. (1) सरळ रूप द्या. $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a^2 - 4}$

उकल :
$$\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a^2 - 4}$$
$$= \frac{(a + 3)(a + 2)}{(a - 4)(a + 3)} \times \frac{(a - 4)}{(a + 2)(a - 2)}$$
$$= \frac{1}{a - 2}$$

उदा. (2) $\frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2}$

उकल :
$$\frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2}$$
$$= \frac{(7x + 4)(x + 2)}{(7x + 4)(7x - 4)} \times \frac{2(7x - 4)}{(x + 2)}$$
$$= 2$$

उदा. (3) सरळ रूप द्या. $\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3}$

उकल :
$$\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3} = \frac{(x + 3y)(x - 3y)}{(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)} = \frac{x + 3y}{x^2 + 3xy + 9y^2}$$

सरावसंच 6.4

1. सोपे रूप द्या.

(1) $\frac{m^2 - n^2}{(m + n)^2} \times \frac{m^2 + mn + n^2}{m^3 - n^3}$

(2) $\frac{a^2 + 10a + 21}{a^2 + 6a - 7} \times \frac{a^2 - 1}{a + 3}$

(3) $\frac{8x^3 - 27y^3}{4x^2 - 9y^2}$

(4) $\frac{x^2 - 5x - 24}{(x + 3)(x + 8)} \times \frac{x^2 - 64}{(x - 8)^2}$

(5) $\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 4}$

(6) $\frac{4x^2 - 11x + 6}{16x^2 - 9}$

(7) $\frac{a^3 - 27}{5a^2 - 16a + 3} \div \frac{a^2 + 3a + 9}{25a^2 - 1}$

(8) $\frac{1 - 2x + x^2}{1 - x^3} \times \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$



उत्तरसूची

सरावसंच 6.1

1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$
(4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$
(7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$
(10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

सरावसंच 6.2

1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$
(3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$
(5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y + \frac{1}{2y}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}\right)$
(7) $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1 + \frac{q}{5}\right)\left(1 - \frac{q}{5} + \frac{q^2}{25}\right)$

सरावसंच 6.3

1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$
(3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$
(5) $\left(2p - \frac{3}{p}\right)\left(4p^2 + 6 + \frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$
(7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a - \frac{2}{b}\right)\left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{4}{b^2}\right)$
2. (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$
(4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

सरावसंच 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2 + 6xy + 9y^2}{2x + 3y}$
(4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$
(6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

