14 चक्रवाढ व्याज

जरा आठवूया.

एखादी व्यक्ती बँक, पतपेढी, अशा संस्थेकडून काही रक्कम ठरावीक व्याजदराने कर्ज म्हणून घेते आणि काही काळानंतर घेतलेली रक्कम परत करते.ती वापरल्याबद्दल काही अधिक पैसे दर वर्षी मोबदला म्हणून देते, त्याला व्याज म्हणतात. सरळव्याज काढण्यासाठी $I = \frac{PNR}{100}$ हे सूत्र आपण शिकलो. या सूत्रात I = व्याज, P = मुद्दल, N = वर्षांत मुदत आणि R = दसादशे व्याजदर असतो.

जाणून घेऊया.

चक्रवाढव्याज (Compound interest)

ठेव किंवा कर्ज यावर बँक चक्रवाढव्याज आकारते, ते का व कसे हे आपण शिकूया.

शिक्षिका : सज्जनरावांनी एका बँकेतून द.सा.द.शे. 10 दराने 1 वर्षाने परतफेडीच्या अटीवर 10,000 रुपये कर्ज घेतले, तर वर्षअखेर त्यांना व्याजासह किती रक्कम द्यावी लागेल?

विद्यार्थी : येथे P = 10,000 रु. ; R = 10; N = 1 वर्ष.

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ रुपये.}$$

∴ सज्जनरावांना वर्षअखेर व्याजासह 10,000 + 1000 = 11,000 रुपये द्यावे लागतील.

विद्यार्थी : पण एखादा कर्जदार वर्षअखेर व्याजाची रक्कम देखील भरू शकला नाही तर ?

शिक्षिका : बँक प्रत्येक वर्षाच्या शेवटी व्याज आकारणी करते व दरवर्षी कर्जदाराने ती व्याजाची रक्कम बँकेत भरावी अशी अपेक्षा करते. कर्जदाराने पहिल्या वर्षानंतर व्याज दिले नाही, तर बँक दुसऱ्या वर्षासाठी मुद्दल व पहिल्या वर्षाचे व्याज मिळून होणारी रक्कम कर्ज आहे असे मानते. म्हणून मुद्दल आणि पहिल्या वर्षाचे व्याज मिळून जी रास होते, तीच रक्कम दुसऱ्या वर्षी मुद्दल मानून पुढे व्याज आकारले जाते. म्हणजे दुसऱ्या वर्षी व्याज आकारणी करताना मुद्दलाची रक्कम पहिल्या वर्षीच्या राशीएवढी असते. या पद्धतीने केलेल्या व्याज आकारणीस **चक्रवाढव्याज** असे म्हणतात.

विद्यार्थी : सज्जनरावांनी कर्जफेडीची मुदत आणखी एक वर्ष वाढवली तर?

शिक्षिका : तर दुसऱ्या वर्षासाठी 11,000 रुपये मुद्दल मानून त्यावर व्याज आणि रास काढावी लागेल.

विद्यार्थी : यासाठी आधीच्या इयत्तेत शिकलेले $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}} = \frac{110}{100}$ हे गुणोत्तर वापरले तर चालेल ना ?

शिक्षिका : नक्कीच ! प्रत्येक वर्षासाठी $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर स्थिर आहे. चक्रवाढव्याजाची आकारणी करताना प्रत्येक वर्षी मागील वर्षाची रास ही पुढच्या वर्षाचे मुद्दल असते. म्हणून व्याजाऐवजी थेट रास काढणे सोईचे ठरते. पहिल्या वर्षानंतर रास A_1, दुसऱ्या वर्षानंतर रास A_2, तिसऱ्या वर्षानंतर रास A_3 असे लिहू.

प्रथम मुद्दल P होते.

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

दुसऱ्या वर्षाची रास काढण्यासाठी

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

विद्यार्थी : मग तिसऱ्या वर्षाची रास A_3 काढताना

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

शिक्षिका : शाब्बास ! हे चक्रवाढव्याजाने रास काढण्याचे सूत्रच आहे. येथे, $\frac{110}{100}$ ही एक रुपयाची वर्षअखेर होणारी रास आहे हे लक्षात घ्या. जेवढ्या वर्षांची रास काढावयाची तेवढ्या वेळा मुद्दलाला या गुणोत्तराने गुणावे.

विद्यार्थी : म्हणजे पहिल्या वर्षाअखेर $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर M आहे आणि P हे मुद्दल आहे असे मानले तर वर्ष अखेर रास $P \times M$, दुसऱ्या वर्षाअखेर $P \times M^2$, तिसऱ्या वर्षाअखेर रास $P \times M^3$ होते. या रीतीने कितीही वर्षांची रास काढता येते.

शिक्षिका : बरोबर ! द.सा.द.शे. R हा व्याजाचा दर असेल, तर

$\therefore$ 1 रुपयाची 1 वर्षाने होणारी रास = $1 \times M = 1 \times \frac{100+R}{100} = 1 \times \left(1+\frac{R}{100}\right)$ आहे.

$\therefore$ P रुपयांची 1 वर्षाची रास = $P \times \frac{100+R}{100} = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)$

$\therefore$ मुद्दल P, व्याजाचा दसादशे दर R, मुदत N वर्षे असेल, तर

N वर्षांनंतर रास, $A = P \times \left(\frac{100+R}{100}\right)^N = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N$

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) 4000 रुपयांचे 3 वर्षांचे द.सा.द.शे. $12\frac{1}{2}$ दराने चक्रवाढव्याज काढा.

उकल : येथे, P = 4000 रु.; $R = 12\frac{1}{2}\%$; N = 3 वर्षे.

$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N = P\left(1+\frac{12.5}{100}\right)^3$

$= 4000\left(1+\frac{125}{1000}\right)^3$

$A = 4000\left(\frac{1125}{1000}\right)^3 = 4000\left(\frac{9}{8}\right)^3$

= 5695.31 रुपये

∴ तीन वर्षांचे चक्रवाढव्याज (I) = रास − मुद्दल

= 5695.31 − 4000 = 1695.31 रुपये

सरावसंच 14.1

1. चक्रवाढव्याजाने येणारी रास व चक्रवाढव्याज काढा.

अ.क्र.	मुद्दल (रुपये)	दर (द.सा.द.शे.)	मुदत (वर्षे)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. समीररावांनी एका पतपेढीतून द.सा.द.शे. 12 दराने 3 वर्षांसाठी 12500 रुपये कर्ज घेतले. तर त्यांना तिसऱ्या वर्षअखेर चक्रवाढव्याज आकारणीने एकूण किती रुपये परतफेड करावी लागेल ?

3. शलाकाने व्यवसाय सुरू करण्यासाठी द.सा.द.शे. $10\frac{1}{2}$ दराने 8000 रुपये कर्ज घेतले. तर 2 वर्षांनंतर कर्ज परतफेड करताना चक्रवाढव्याज आकारणीने तिला किती व्याज भरावे लागेल ?

अधिक माहितीसाठी

1. काही आर्थिक व्यवहारात दर सहा महिन्यांना व्याज आकारणी करतात. N वर्षे मुदतीसाठी व्याजाचा दर R असेल तर सहामाही व्याज आकारणीमध्ये दिलेल्या मुद्दलासाठी व्याजाचा दर $\frac{R}{2}$ घेतात. N वर्षांसाठी सहा महिन्यांचे 2N टप्पे होतात हे लक्षात घेऊन व्याज आकारणी करतात.

2. अनेक वित्तसंस्था मासिक व्याज आकारणीने चक्रवाढव्याज काढतात. तेव्हा व्याजाचा मासिक दर $\frac{R}{12}$ घेतात आणि मुदत 12 × N एकूण महिन्यांएवढी घेऊन व्याज आकारणी करतात.

3. अलीकडील काळात बँका दैनिक व्याज आकारणीने चक्रवाढव्याज काढतात.

उपक्रम : तुमच्या जवळच्या बँकेत जाऊन तिथे वेगवेगळ्या योजनांची माहिती मिळवा. त्या योजनांच्या व्याजांच्या दरांची सारणी करून ती वर्गात लावा.

जाणून घेऊया.

चक्रवाढव्याजाच्या सूत्राचे उपयोजन (Application of formula for compound interest)

चक्रवाढव्याजाने रास काढण्याच्या सूत्राचा उपयोग दैनंदिन जीवनातील इतर क्षेत्रांतील उदाहरणे सोडवण्यासाठीही करता येतो; जसे लोकसंख्येतील वाढ, एखाद्या वाहनाची दरवर्षी कमी होणारी किंमत इत्यादी.

एखादी वस्तू काही काळ वापरून ती विकल्यास तिची किंमत खरेदीच्या किमतीपेक्षा कमी होते. कमी होणाऱ्या किमतीला घट किंवा घसारा (depreciation) असे म्हणतात.

किमतीतील घसारा ठरावीक काळात ठरावीक दराने होत असतो. उदा. यंत्राची किंमत दरवर्षी ठरावीक टक्क्यांनी कमी होते. काही काळानंतर कमी झालेली किंमत काढण्यासाठी चक्रवाढव्याजाच्या सूत्राचा उपयोग होतो.

ही किंमत काढण्यासाठी घसाऱ्याचा दर माहीत असावा लागतो. वस्तूची किंमत कमी होत असल्याने घसाऱ्याचा (घटीचा) दर R हा ऋण घेतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका शहराची लोकसंख्या दरवर्षी 8% दराने वाढते. 2010 साली त्या शहराची लोकसंख्या 2,50,000 असल्यास 2012 मध्ये त्या शहराची लोकसंख्या किती होती ?

उकल : येथे, P = 2010 ची लोकसंख्या = 2,50,000

A = 2012 मधील लोकसंख्या;

R = लोकसंख्या वाढीचा दर = दरसाल 8%

N = 2 वर्षे

A = 2012 मध्ये म्हणजेच 2 वर्षांनी होणारी लोकसंख्या

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^{N} = 250000 \times \left(1+\frac{8}{100}\right)^{2}$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right)^{2}$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right) \times \left(\frac{108}{100}\right)$$

$$= 2,91,600.$$

$\therefore$ 2012 मध्ये शहराची लोकसंख्या 2,91,600 होती.

उदा. (2) रेहानाने एक स्कूटर 2015 मध्ये 60000 रुपयांस विकत घेतली. घसाऱ्याचा दर द.सा.द.शे 20 असल्यास 2 वर्षांनंतर त्या स्कूटरची किंमत किती होईल ?

उकल : येथे, P = 60000 रु. A = 2 वर्षांनंतर मिळणारी किंमत

R = घसाऱ्याचा दर = −20 % दरसाल N = 2 वर्षे

A = 2 वर्षांनंतर मिळणारी किंमत

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$= 60000 \times \left(1+\frac{-20}{100}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(1-\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

A = 38400 रु.

∴ दोन वर्षांनी स्कूटरची किंमत 38400 रुपये होईल.

चक्रवाढ पद्धतीने व्याज आकारणीच्या सूत्रातील A, P, N, R या चार बाबींपैकी तीन बाबी दिल्यास चौथी बाब कशी काढता येते, हे पुढील उदाहरणांतून अभ्यासा.

उदा. (3) एका रकमेची द.सा.द.शे 10 दराने 3 वर्षांनी चक्रवाढ व्याजाने 6655 रुपये रास होते. तर ती रक्कम काढा.

उकल : येथे A = 6655 रुपये; R = द.सा.द.शे. 10; N = 3 वर्षे.

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$\therefore 6655 = P \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\therefore P = \frac{6655 \times 10^3}{11 \times 11 \times 11} \qquad P = 5 \times 10^3 = 5000$$

∴ ती रक्कम 5000 रुपये आहे.

उदा. (4) द.सा.द.शे. 10 दराने 9000 रुपयांचे किती वर्षांचे चक्रवाढव्याज 1890 रुपये होईल ?

उकल : येथे R = 10; P = 9000; चक्रवाढव्याज = 1890

अगोदर चक्रवाढव्याजाने होणारी रास काढू.

$$A = P + I = 9000 + 1890 = 10890$$

चक्रवाढव्याजाने होणाऱ्या राशीचे सूत्र लिहू व त्यात किमती घालू.

$$A = 10890 = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^N = 9000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \quad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100} \quad \therefore \; N = 2$$

∴ 2 वर्षांत चक्रवाढव्याज 1890 रुपये होईल.

सरावसंच 14.2

1. एका उड्डाणपुलाच्या बांधकामावर सुरुवातीला 320 मजूर होते. दरवर्षी 25% मजूर वाढवण्यात आले, तर दोन वर्षांनंतर त्या कामावर किती मजूर असतील ?
2. एका मेंढपाळाकडे 200 मेंढ्या असतील आणि दरवर्षी त्यांच्या संख्येत 10% ने वाढ होत असेल तर 2 वर्षांनंतर त्याच्याकडे किती मेंढ्या असतील ?
3. एका अभयारण्यात 40,000 झाडे आहेत. दरवर्षी 5% दराने वृक्षवाढ करण्याचे उद्दिष्ट ठरवण्यात आले असेल, तर 3 वर्षांनंतर त्या अभयारण्यातील झाडांची संख्या किती असली पाहिजे ?
4. आज एक मशीन 2,50,000 रुपयांना खरेदी केले. घसाऱ्याचा दर दरवर्षी 10% असल्यास दोन वर्षांनंतर मशीनची किंमत खरेदीपेक्षा किती कमी होईल ?
5. एका मुद्दलाची द.सा.द.शे. 16 दराने चक्रवाढव्याजाने दोन वर्षांची रास 4036.80 रुपये झाली. तर दोन वर्षांत झालेले व्याज किती?
6. 15000 रुपये चक्रवाढव्याजाने द.सा.द.शे. 12 दराने कर्जाऊ घेतले तर 3 वर्षांनी कर्ज फेडताना किती रुपये द्यावे लागतील ?
7. द.सा.द.शे. 18 दराने चक्रवाढव्याजाने एका मुद्दलाची 2 वर्षांची रास 13,924 रुपये झाली, तर मुद्दल किती होते ?
8. शहराच्या एका उपनगराची लोकसंख्या विशिष्ट दराने वाढते. आजची व दोन वर्षांनंतरची लोकसंख्या अनुक्रमे 16000 व 17640 असतील, तर लोकसंख्या वाढीचा दर काढा.
9. 700 रुपयांची द.सा.द.शे. 10 दराने किती वर्षांत 847 रुपये रास होईल ?
10. द.सा.द.शे. 8 दराने होणारे 20,000 रुपयांवरील 2 वर्षांचे सरळव्याज आणि चक्रवाढव्याज यांतील फरक काढा.

४४४

उत्तरसूची

सरावसंच 14.1

1. (1) 2205, 205 (2) 6298.56, 1298.56 (3) 4622.5, 622.5

2. 17561.60 3. 1768.2

सरावसंच 14.2

1. 500 2. 252 3. 46,305 4. ₹ 47500

5. ₹ 1036.80 6. ₹ 21073.92 7. ₹ 10,000

8. दसादशे 5 9. 2 वर्षांत 10. ₹ 128

CLE7E4