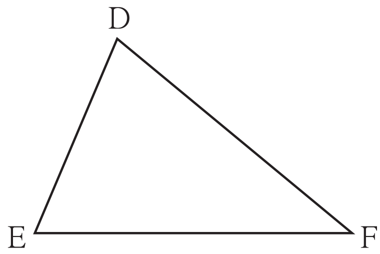
13 त्रिकोणांची एकरूपता

जरा आठवूया.

शेजारील आकृतीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधा.



(i) बाजू DE समोरील कोन कोणता आहे?

(ii) ∠ E हा कोणत्या बाजूसमोरील कोन आहे ?

(iii) बाजू DE आणि बाजू DF यांनी समाविष्ट केलेला कोन कोणता?

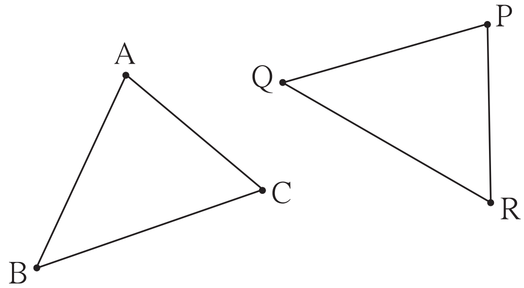
(iv) ∠ E आणि ∠ F यांनी समाविष्ट केलेली बाजू कोणती?

(v) बाजू DE च्या लगत कोणते कोन आहेत?

- ज्या आकृत्या परस्परांशी तंतोतंत जुळतात त्या आकृत्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात.
- ज्या रेषाखंडांची लांबी समान असते ते रेषाखंड एकरूप असतात.
- ज्या कोनांची मापे समान असतात ते कोन एकरूप असतात.

जाणून घेऊया.

त्रिकोणांची एकरूपता (Congruence of triangles)



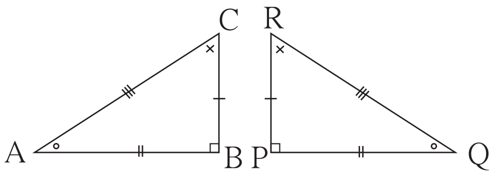
कृती : शेजारील आकृत्या पाहा. पारदर्शक ट्रेसिंग पेपरवर Δ ABC काढून घ्या व तो कागद Δ PQR वर ठेवून पाहा. बिंदू A हा बिंदू P वर, बिंदू B हा बिंदू Q वर आणि बिंदू C हा बिंदू R वर ठेवून पाहा. दोन्ही त्रिकोण तंतोतंत जुळतात, म्हणजेच ते एकरूप आहेत हे दिसेल.

कृतीमध्ये Δ ABC हा Δ PQR वर ठेवण्याची एक पद्धत दिली आहे. परंतु बिंदू A हा Q वर, बिंदू B हा R वर आणि बिंदू C हा P वर ठेवला तर ते त्रिकोण तंतोतंत जुळणार नाहीत. म्हणजे विशिष्ट पद्धतीनेच ते एकमेकांशी जुळवले पाहिजेत. ही जुळवण्याची पद्धत एकास-एक संगतीने दाखवली जाते. बिंदू A ची संगती बिंदू P शी आहे, हे $A \leftrightarrow P$ असे लिहितात. येथे, $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ अशा संगतीत ते त्रिकोण एकरूप आहेत. या पद्धतीने त्रिकोण एकरूप झाले की $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$ तसेच रेख $AB \cong$ रेख PQ, रेख $BC \cong$ रेख QR,

रेख CA ≅ रेख RP या सहा एकरूपता मिळतात म्हणून Δ ABC व Δ PQR हे ABC ↔ PQR या संगतीत एकरूप आहेत असे म्हणतात व Δ ABC ≅ Δ PQR असे लिहितात. अशा लिहिण्यामध्ये A ↔ P, B ↔ Q, C ↔ R ही शिरोबिंदूंची एकास एक संगती व त्यांमुळे मिळणाऱ्या वरील सहा एकरूपता यांचा अंतर्भाव होतो, म्हणून दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे लिहिताना शिरोबिंदूंचा क्रम एकरूपतेची एकास एक संगती पाळतो याकडे लक्ष द्यावे.

चला, चर्चा करूया.

Δ ABC आणि Δ PQR या एकरूप त्रिकोणांचे एकरूप घटक सारख्या खुणांनी दाखवले आहेत.



अनिल, रेहाना व सुरजित यांनी या त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे लेखन पुढीलप्रमाणे केले होते.

अनिलचे लेखन : Δ ABC ≅ Δ QPR

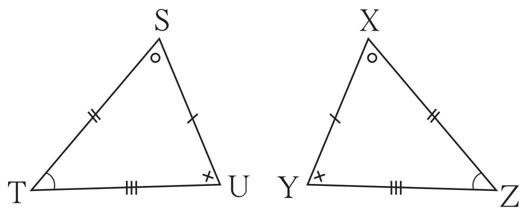
रेहानाचे लेखन : Δ BAC ≅ Δ PQR

सुरजितचे लेखन : Δ ABC ≅ Δ PQR

यांपैकी कोणते लेखन बरोबर आहे आणि कोणते चूक आहे? चर्चा करा.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) शेजारच्या आकृतीतील त्रिकोणांचे सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत.



(i) शिरोबिंदूंच्या ज्या एकास एक संगतीने हे त्रिकोण एकरूप होतात त्या संगतीत त्रिकोणांची एकरूपता दोन प्रकारे लिहा.

(ii) Δ XYZ ≅ Δ STU हे लेखन बरोबर आहे की चूक, हे सकारण लिहा.

उकल : निरीक्षणावरून दिलेले त्रिकोण STU ↔ XZY या एकास एक संगतीत एकरूप आहेत.

(i) एक प्रकार : Δ STU ≅ Δ XZY, दुसरा प्रकार: Δ UST ≅ Δ YXZ

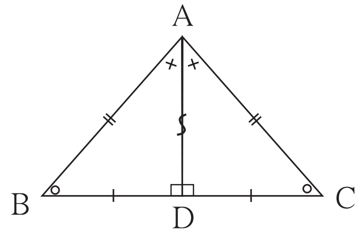
हीच एकरूपता आणखी वेगवेगळ्या प्रकारे लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

(ii) या त्रिकोणांची एकरूपता Δ XYZ ≅ Δ STU अशी लिहिली, तर बाजू ST ≅ बाजू XY असा अर्थ होईल, आणि ते चूक आहे.

∴ Δ XYZ ≅ Δ STU हे लेखन चूक आहे.

(Δ XYZ ≅ Δ STU या लेखनामुळे आणखीही काही चुका होतात. त्या विद्यार्थ्यांनी शोधाव्यात. परंतु उत्तर का चूक आहे, हे सांगण्यासाठी कोणतीही एक चूक दाखवणे पुरेसे असते.)

उदा. (2) पुढे दिलेल्या आकृतीत, त्रिकोणांच्या जोडीतील सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. त्या त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास-एक संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील हे सांगा व त्रिकोणांची एकरूपता चिन्हाने दर्शवा.



उकल : ΔABD आणि ΔACD यांमध्ये बाजू AD हा सामाईक रेषाखंड आहे.

प्रत्येक रेषाखंड स्वतःशी एकरूप असतो.

संगती : A ↔ A, B ↔ C, D ↔ D. Δ ABD ≅ Δ ACD

टीप : सामाईक बाजूवर ‘ Ᶎ ’ अशी खूण करण्याची पद्धत आहे.

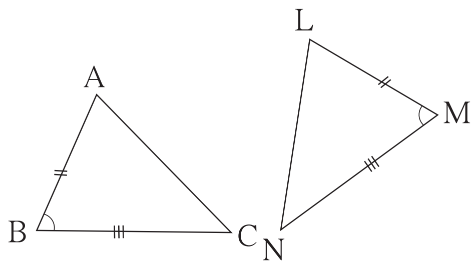
जाणून घेऊया.

एखाद्या जोडीतील त्रिकोण एकरूप आहेत हे दाखवण्यासाठी सर्व सहा घटकांची एकरूपता दाखवण्याची आवश्यकता नसते. एका त्रिकोणाचे तीन विशिष्ट घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असतात, तेव्हा उरलेल्या तीन घटकांच्या जोड्याही परस्परांशी एकरूप असतात, म्हणजे ते विशिष्ट तीन घटक एकरूपतेची कसोटी निश्चित करतात.

आपण काही त्रिकोण रचना करायला शिकलो आहोत. जे तीन घटक दिले असता त्रिकोणाची एकमेव आकृती काढता येते, तेच घटक एकरूपतेच्या कसोट्या निश्चित करतात, हे आपण पडताळून पाहू.

(1) दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन : बाकोबा कसोटी

बाजूंच्या दोन जोड्या एकरूप असतील आणि त्यांनी समाविष्ट केलेले कोनही एकरूप असतील असे ΔABC आणि ΔLMN काढा.

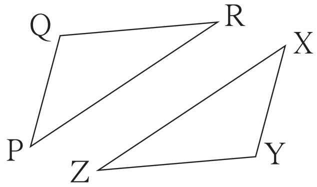


ΔABC व ΔLMN मध्ये l(AB) = l(LM), l(BC) = l(MN), $m\angle ABC = m\angle LMN$

ΔABC हा ट्रेसिंग पेपरवर काढून घ्या व ट्रेसिंग पेपर ΔLMN वर असा ठेवा की, शिरोबिंदू A हा शिरोबिंदू L वर, बाजू AB ही बाजू LM वर, ∠B हा ∠M वर आणि बाजू BC ही बाजू MN वर पडेल. ΔABC ≅ ΔLMN आहे हे दिसून येईल.

(2) तीन संगत बाजू : बाबाबा कसोटी

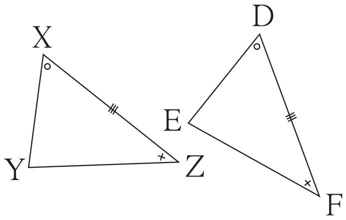
$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), l(RP) = l(ZX)$ असे त्रिकोण ΔPQR व ΔXYZ काढा.



ट्रेसिंग पेपरवर ΔPQR काढून तो ΔXYZ वर $P \leftrightarrow X$, $Q \leftrightarrow Y$, $R \leftrightarrow Z$ अशा एकास एक संगतीने ठेवा. $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ हे दिसून येईल.

(3) दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू : कोबाको कसोटी

ΔXYZ आणि ΔDEF असे काढा की, $l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D$ आणि $\angle Z \cong \angle F$



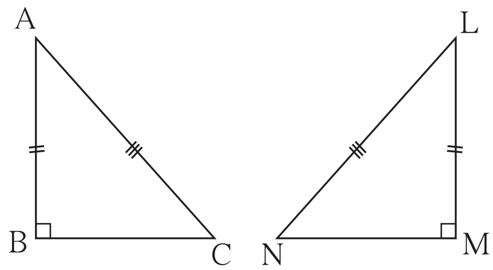
ट्रेसिंग पेपरवर ΔXYZ काढून तो पेपर ΔDEF वर ठेवा. $X \leftrightarrow D$, $Y \leftrightarrow E$, $Z \leftrightarrow F$ या संगतीनुसार $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$ असे दिसेल.

(4) कोकोबा (किंवा बाकोको) कसोटी :

दोन त्रिकोणांतील संगत कोनांच्या दोन जोड्या एकरूप असतील, तर उरलेले कोन एकरूप असतात; कारण प्रत्येक त्रिकोणातील तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते. म्हणून कोणतेही दोन कोन व एका कोनाची लगतची बाजू दुसऱ्या त्रिकोणातील दोन कोन व संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर कोबाको कसोटीची अट पुरी होते व ते त्रिकोण एकरूप असतात.

(5) काटकोन त्रिकोणांची कर्णभुजा कसोटी

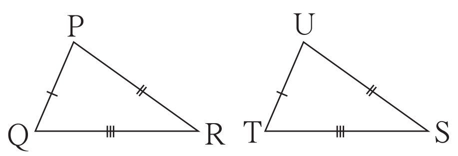
काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक भुजा दिली असता एकमेव त्रिकोण काढता येतो. एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक भुजा दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असलेले दोन काटकोन त्रिकोण काढा. वर दिलेल्या रीतीप्रमाणे ते एकरूप आहेत हे पडताळा.



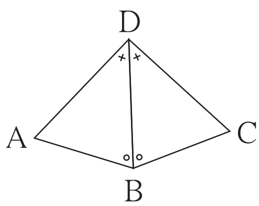
सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार आणि शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास एक संगतीनुसार एकरूप होतात, हे लिहा.

(i)



(ii)

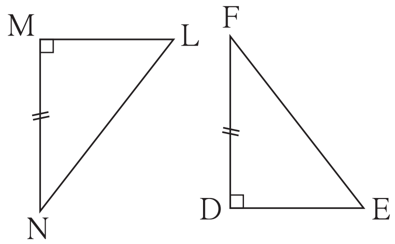


उकल : (i) बा-बा-बा कसोटीने PQR ↔ UTS या संगतीनुसार

(ii) को-बा-को कसोटीने DBA ↔ DBC या संगतीनुसार

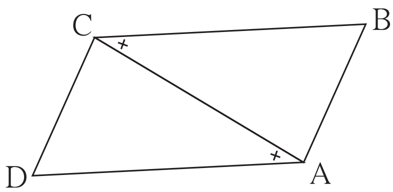
उदा. (2) पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीतील समान खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक आकृतीखाली त्रिकोणांच्या एकरुपतेची कसोटी लिहिली आहे. त्या कसोटीने त्रिकोण एकरूप होण्यासाठी आणखी कोणती माहिती देणे आवश्यक आहे आणि ती माहिती दिल्यावर त्रिकोण शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास संगतीने एकरूप होतील, हे लिहा.

(i)



कर्णभुजा कसोटी

(ii)



कोबाको कसोटी

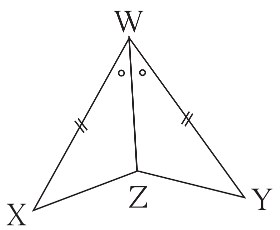
उकल : (i) दिलेले त्रिकोण हे काटकोन त्रिकोण आहेत. त्यांच्या एकेक बाजू एकरूप आहेत. म्हणून त्यांचे रेख LN व EF हे कर्ण एकरूप आहेत, ही माहिती देणे आवश्यक आहे. ही माहिती दिल्यावर LMN ↔ EDF या संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील.

(ii) आकृतीतील त्रिकोणांची रेख CA ही भुजा सामाईक आहे म्हणून $\angle$ DCA $\cong$ $\angle$ BAC ही माहिती देणे आवश्यक आहे. ही माहिती दिल्यावर DCA ↔ BAC या संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील.

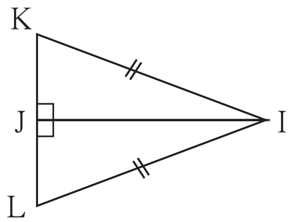
सरावसंच 13.1

1. पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार आणि शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास एक संगतीनुसार एकरूप होतात, हे लिहा.

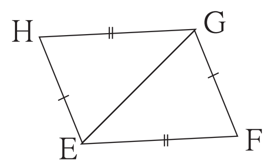
(i)



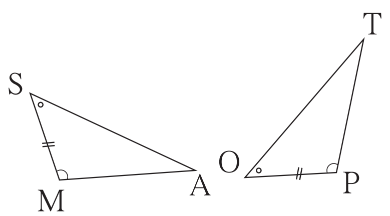
(ii)



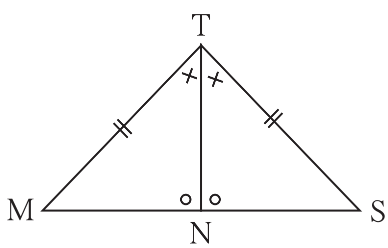
(iii)



(iv)



(v)



हे मला समजले.

(1) **बा–को–बा कसोटी** : जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

(2) **बा–बा–बा कसोटी**: जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू ह्या दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप असतात.

(3) **को–बा–को कसोटी** : जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांनी समाविष्ट केलेली बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि त्यांनी समाविष्ट केलेली बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप असतात.

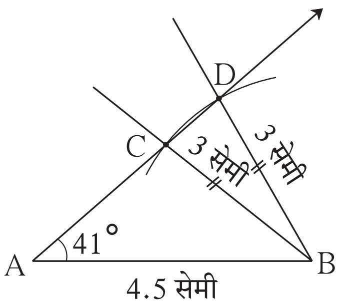
(4) **को–को–बा कसोटी** : जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांच्यात समाविष्ट नसलेली एक बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे संगत कोन आणि त्यांच्यात समाविष्ट नसलेली संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

(5) **कर्ण–भुजा कसोटी** : जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू हे दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

अधिक माहितीसाठी

एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असेल, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतील का?

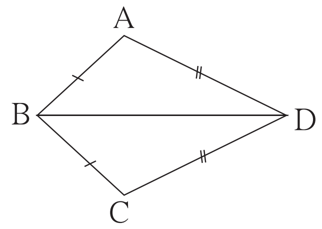
सोबतची आकृती पाहा. Δ ABC आणि Δ ABD यांमध्ये, बाजू AB सामाईक आहे. बाजू BC $\cong$ बाजू BD, $\angle$ A हा सामाईक कोन आहे, परंतु त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेला तो कोन नाही. म्हणजे एका त्रिकोणाचे तीन घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप आहेत, परंतु ते त्रिकोण एकरूप नाहीत.



यावरून, एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असतील, तर दोन त्रिकोण एकरूप असतीलच असे नाही.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) आकृती मध्ये, $\square$ ABCD च्या एकरूप बाजू, सारख्या खुणांनी दाखवल्या आहेत. या आकृतीत एकरूप कोनांच्या जोड्या आहेत का, हे शोधा.



उकल : Δ ABD आणि Δ CBD मध्ये,

बाजू AB $\cong$ बाजू CB ..... (दिलेले आहे)

बाजू DA $\cong$ बाजू DC ..... (दिलेले आहे)

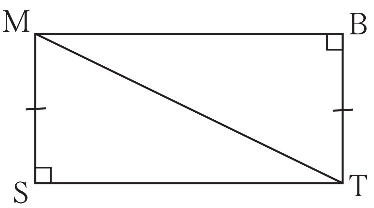
बाजू BD ही सामाईक आहे.

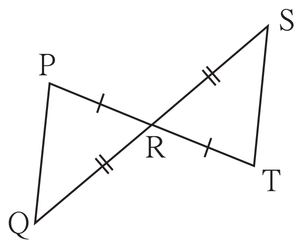
$\therefore$ Δ ABD $\cong$ Δ CBD .... (बा-बा-बा कसोटीनुसार)

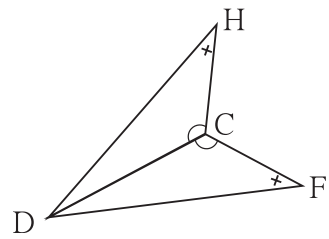
$\therefore$ $\angle$ BAD $\cong$ $\angle$ BCD
$\angle$ ABD $\cong$ $\angle$ CBD
$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ CDB } .....(एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

सरावसंच 13.2

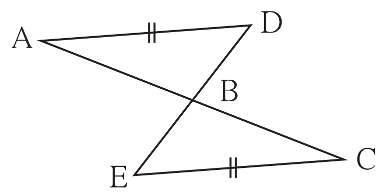
1. पुढीलपैकी प्रत्येक जोडीतील त्रिकोणांत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण, शिरोबिंदूच्या कोणत्या संगतीने आणि कोणत्या कसोटीने एकरूप आहेत हे लिहा. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोणांचे उरलेले संगत एकरूप घटक लिहा.

(1)


(2)


(3)


2★. सोबतच्या आकृतीत, रेख AD $\cong$ रेख EC आहे आणखी कोणती माहिती दिली असता ΔABD व ΔEBC बाकोको कसोटीने एकरूप होतील ?



उत्तरसूची

सरावसंच 13.1 1. (i) बाकोबा, XWZ $\leftrightarrow$ YWZ (ii) कर्णभुजा KJI $\leftrightarrow$ LJI (iii) बाबाबा HEG $\leftrightarrow$ FGE (iv) कोबाको SMA $\leftrightarrow$ OPT (v) बाकोको किंवा कोबाको MTN $\leftrightarrow$ STN

सरावसंच 13.2 1. (1) Δ MST $\cong$ Δ TBM - कर्णभुजा, बाजू ST $\cong$ बाजू MB, $\angle$ SMT $\cong$ $\angle$ BTM, $\angle$ STM $\cong$ $\angle$ BMT (2) Δ PRQ $\cong$ Δ TRS - बाकोबा, बाजू PQ $\cong$ बाजू TS, $\angle$ RPQ $\cong$ $\angle$ RTS, $\angle$ PQR $\cong$ $\angle$ TSR
(3) Δ DCH $\cong$ Δ DCF - बाकोको किंवा कोबाको, $\angle$ DHC $\cong$ $\angle$ DFC, बाजू HC $\cong$ बाजू FC
2. $\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ CEB आणि $\angle$ ABD $\cong$ $\angle$ CBE किंवा $\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ ECB आणि $\angle$ ABD $\cong$ $\angle$ CBE