

10

## बहुपदींचा भागाकार



जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत बैजिक राशींवर बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया कशा करायच्या हे आपण शिकलो आहोत.

खालील उदाहरणांत रिकाम्या जागा भरा.

$$(1) 2a + 3a = \boxed{\phantom{00}}$$

$$(2) 7b - 4b = \boxed{\phantom{00}}$$

$$(3) 3p \times p^2 = \boxed{\phantom{00}}$$

$$(4) 5m^2 \times 3m^2 = \boxed{\phantom{00}}$$

$$(5) (2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \boxed{\phantom{00}}$$

$$(6) (3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \boxed{\phantom{00}}$$



जाणून घेऊया.

### बहुपदीची ओळख (Introduction to polynomial)

एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल, तर ती राशी एका चलातील बहुपदी असते.

उदाहरणार्थ,  $x^2 + 2x + 3$  ;  $3y^3 + 2y^2 + y + 5$  या एका चलातील बहुपदी आहेत.

बहुपदी या विशिष्ट बैजिक राशीच असतात म्हणून बहुपदींवरील बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया बैजिक राशींप्रमाणे केल्या जातात.

$$\begin{aligned} \text{उदाहरणार्थ, (1) } & (3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2) \\ & = 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2) \\ & = 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3 \\ & = 12x^5 - 17x^4 + 6x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8) \\ & = 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8 \\ & = -3x^2 + 11x - 13 \end{aligned}$$

### बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial)

पुढील उदाहरणात दिलेल्या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक चौकटीत लिहा.

उदा. (1)  $3x^2 + 4x$  या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक  आहे.

उदा. (2)  $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$  या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक  आहे.

दिलेल्या बहुपदीतील चलाच्या सर्वात मोठ्या घातांकास त्या बहुपदीची कोटी म्हणतात.



हे मला समजले.

- एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल तर ती राशी बहुपदी असते.
- बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक म्हणजे त्या बहुपदीची कोटी होय.



जाणून घेऊया.

### (I) एकपदीला एकपदीने भागणे (To divide a monomial by a monomial)

उदा. (1)  $15p^3 \div 3p$  हा भागाकार करा.

उकल : भागाकार ही गुणाकाराची उलट क्रिया आहे.

$\therefore 15p^3 \div 3p$  हा भागाकार करण्यासाठी,  $3p$  या एकपदीला कोणत्या एकपदीने गुणले असता गुणाकार  $15p^3$  येतो, हा विचार करावा लागेल.

$$3p \times 5p^2 = 15p^3 \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

या उदाहरणाची मांडणी शेजारी दाखवल्याप्रमाणे करता येते.

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p \overline{) 15p^3} \\ \underline{-15p^3} \\ 0 \end{array}$$

उदा. (2) भागाकार करा व चौकटीत योग्य ती पदे लिहा.

(i)  $(-36x^4) \div (-9x)$

(ii)  $(5m^2) \div (-m)$

(iii)  $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \boxed{\phantom{000}} \\ -9x \overline{) -36x^4} \\ \underline{\phantom{000}} \\ \boxed{\phantom{000}} \\ \underline{\phantom{000}} \\ \boxed{\phantom{000}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{\phantom{000}} \\ -m \overline{) 5m^2} \\ \underline{\phantom{000}} \\ \boxed{\phantom{000}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{\phantom{000}} \\ 2y^3 \overline{) -20y^5} \\ \underline{\phantom{000}} \\ \boxed{\phantom{000}} \\ \underline{\phantom{000}} \\ \boxed{\phantom{000}} \end{array}$$

### बहुपदीला एकपदीने भागणे (To divide a polynomial by a monomial)

खालील उदाहरणे अभ्यासा व बहुपदीला एकपदीने भागण्याची रीत समजून घ्या.

उदा. (1)  $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

उकल :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x \overline{) 6x^3 + 8x^2} \\ \underline{6x^3} \\ 0 + 8x^2 \\ \underline{- 8x^2} \\ 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i)  $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii)  $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$  भागाकार =  $3x^2 + 4x$  व बाकी = 0

उदा. (2)  $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

उकल :

$$\begin{array}{r} 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ 5y^2 \overline{)15y^4 + 10y^3 - 3y^2} \\ \underline{-15y^4} \\ 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ \underline{-10y^3} \\ 0 - 3y^2 \\ \underline{+3y^2} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$  भागाकार =  $3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$  व बाकी = 0

स्पष्टीकरण -

(i)  $5y^2 \times 3y^2 = 15y^4$   
 (ii)  $5y^2 \times 2y = 10y^3$   
 (iii)  $5y^2 \times \frac{-3}{5} = -3y^2$

उदा. (3)  $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

उकल :

$$\begin{array}{r} 4p - 2 \\ 3p^2 \overline{)12p^3 - 6p^2 + 4p} \\ \underline{-12p^3} \\ 0 - 6p^2 + 4p \\ \underline{+6p^2} \\ 0 + 4p \end{array}$$

$\therefore$  भागाकार =  $4p - 2$  व बाकी =  $4p$

स्पष्टीकरण -

(i)  $3p^2 \times 4p = 12p^3$   
 (ii)  $3p^2 \times -2 = -6p^2$

उदा. (4)  $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

उकल :

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x + 4 \\ x^2 \overline{)5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6} \\ \underline{-5x^4} \\ 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{+3x^3} \\ 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{-4x^2} \\ 0 + 2x - 6 \end{array}$$

$\therefore$  भागाकार =  $5x^2 - 3x + 4$  व बाकी =  $2x - 6$

स्पष्टीकरण -

(i)  $x^2 \times 5x^2 = 5x^4$   
 (ii)  $x^2 \times -3x = -3x^3$   
 (iii)  $x^2 \times 4 = 4x^2$

बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.

वरील उदा. (3) मध्ये, बाकी  $4p$  ची कोटी ही  $3p^2$  या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे. तसेच उदा. (4) मध्ये  $2x - 6$  ह्या बाकीची कोटी ही  $x^2$  या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे हे लक्षात घ्या.

### सरावसंच 10.1

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

$$(1) 21m^2 \div 7m$$

$$(2) 40a^3 \div (-10a)$$

$$(3) (-48p^4) \div (-9p^2)$$

$$(4) 40m^5 \div 30m^3$$

$$(5) (5x^3 - 3x^2) \div x^2$$

$$(6) (8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$$

$$(7) (2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$$

$$(8) (21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$$

$$(9) (6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$$

$$(10) (25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$$



जाणून घेऊया.

### बहुपदीला द्विपदीने भागणे (To divide a polynomial by a binomial)

बहुपदीला द्विपदीने भागण्याची रीत ही बहुपदीला एकपदीने भागण्याच्या रीतीप्रमाणेच असते.

उदा. (1)  $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

उकल :

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{x^2 + 2x} \phantom{+ 4} \\ 0 + 2x + 4 \\ \underline{\phantom{0} + 2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण

(i) प्रथम भाज्यास व भाजकास घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावे.

भाजकाच्या पहिल्या पदास  $x$  ने गुणले की भाज्याचे पहिले पद मिळते.

$\therefore$  भाजकास  $x$  ने गुणावे

(ii)  $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$  भागाकार =  $x + 2$  व बाकी = 0

उदा. (2)  $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

उकल : येथे भाज्य बहुपदीची कोटी 4 आहे. तिच्यातील चलाचे घातांक उतरत्या क्रमाने नाहीत. तसेच घातांक 3 असलेले पदही नाही. ते  $0y^3$  मानू आणि भाज्य बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहू व भागाकार करू.

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 4y^2 + 6y \\
 y + 4 \overline{) y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y} \\
 \underline{-y^4 + 4y^3} \phantom{0} \\
 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 \underline{+4y^3 - 16y^2} \phantom{0} \\
 0 + 6y^2 + 24y \\
 \underline{-6y^2 + 24y} \\
 0
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i)  $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii)  $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii)  $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$  भागाकार =  $y^3 - 4y^2 + 6y$  व बाकी = 0

उदा. (3)  $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

उकल :

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 5x + 9 \\
 x^2 - 1 \overline{) 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9} \\
 \underline{-6x^4 \phantom{+ 5x^3} + 6x^2} \phantom{+ 5x - 9} \\
 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 \underline{+5x^3 \phantom{+ 9x^2} - 5x} \phantom{- 9} \\
 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 \underline{-9x^2 \phantom{+ 10x} + 9} \\
 0 + 10x + 0
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i)  $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii)  $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii)  $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$  भागाकार =  $6x^2 + 5x + 9$  व बाकी =  $10x$



- बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते, किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.
- भाज्य बहुपदीतील पदे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने नसतील तर ती बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावी ती तशी लिहिताना एखाद्या घातांकाचे पद नसेल तर त्याचा सहगुणक 0 मानून घातांकांचा उतरता क्रम पूर्ण करावा.

### सरावसंच 10.2

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

(1)  $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$

(2)  $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3)  $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$

(4)  $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5)  $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6\*)  $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7\*)  $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$



### उत्तरसूची

#### सरावसंच 10.1

1.  $3m, 0$

2.  $-4a^2, 0$

3.  $\frac{16}{3}p^2, 0$

4.  $\frac{4}{3}m^2, 0$

5.  $5x - 3, 0$

6.  $4p - 2, 0$

7.  $y + 2, 3$

8.  $3x, -14x^2 + 7x$

9.  $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 0$

10.  $5m - 3, 10m + 8$

#### सरावसंच 10.2

1.  $y + 6, 0$

2.  $p + 4, -17$

3.  $4x^2 + 18x + 75, 300$

4.  $m^2 + m + 1, 10$

5.  $x^2 + x - 5, x - 2$

6.  $a - 1, a^2 + a - 1$

7.  $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}, \frac{-13}{16}$

