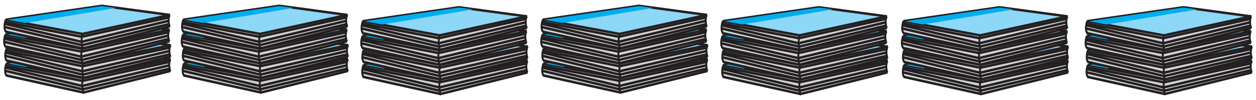
6 घातांक

जरा आठवूया.

7 मुलांना प्रत्येकी 4 वह्यांचे वाटप केले.

एकूण वह्या $= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$ वह्या



येथे बेरजेची क्रिया अनेक वेळा केली आहे.

एकाच संख्येची अनेक वेळा केलेली बेरीज ही गुणाकाराच्या रूपात मांडता येते.

एकूण वह्या $= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 7 = 28$

जाणून घेऊया.

पाया व घातांक (Base and Index)

आता 2 ही संख्या अनेक वेळा घेऊन केलेल्या गुणाकाराची मांडणी थोडक्यात कशी करतात ते पाहू.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ येथे 8 वेळा 2 घेऊन गुणाकार केला आहे.

ही मांडणी थोडक्यात 2^8 अशी करतात. येथे 2^8 हे गुणाकाराचे घातांक रूप आहे.

यामध्ये 2 हा **पाया** व 8 हा **घातांक** आहे.

8 ⟵ घातांक

2 ⟵ पाया

उदा. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ येथे 5^4 ही घातांकित संख्या आहे.

5^4 या घातांक रूपातील संख्येत 5 ही संख्या 'पाया' आणि 4 ही संख्या 'घातांक' आहे.

यांचे वाचन '5 चा घातांक 4' किंवा '5 चा चौथा घात' असे करतात.

सामान्यपणे a ही कोणतीही संख्या असेल तर, $a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots$ (m वेळा) $= a^m$

a^m चे वाचन 'a चा घातांक m' किंवा 'a चा m वा घात' असे करतात.

इथे m ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore\ 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ म्हणजे 5^4 या घातांकित संख्येची किंमत 625 आहे.

तसेच $\left[\frac{-2}{3}\right]^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{27}$ म्हणजे $\left[\frac{-2}{3}\right]^3$ ची किंमत $\frac{-8}{27}$ आहे.

$7^1 = 7$, $10^1 = 10$ हे ध्यानात घ्या. **कोणत्याही संख्येचा पहिला घात म्हणजे ती संख्याच असते.** संख्येचा घातांक 1 असेल तर तो न लिहिण्याचा संकेत आहे. जसे $5^1 = 5$, $a^1 = a$

सरावसंच 26

1. पुढील सारणी पूर्ण करा.

अ. क्र.	घातांकित संख्या	पाया	घातांक	गुणाकार रूप	किंमत
(i)	3^4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
(ii)	16^3				
(iii)		(-8)	2		
(iv)				$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$	$\frac{81}{2401}$
(v)	$(-13)^4$				

2. किंमत काढा.

(i) 2^{10} (ii) 5^3 (iii) $(-7)^4$ (iv) $(-6)^3$ (v) 9^3

(vi) 8^1 (vii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (viii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

वर्ग व घन (Square and cube)

$3^2 = 3 \times 3$

3^2 चे वाचन 3 चा दुसरा घात

किंवा 3 चा वर्ग असे करतात.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

5^3 चे वाचन 5 चा तिसरा घात

किंवा 5 चा घन असे करतात.

लक्षात ठेवा :

कोणत्याही संख्येचा दुसरा घात म्हणजे त्या संख्येचा वर्ग होय.

कोणत्याही संख्येचा तिसरा घात म्हणजे त्या संख्येचा घन होय.

जाणून घेऊया.

पाया समान असलेल्या घातांकित संख्यांचा गुणाकार

उदा. $2^4 \times 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

यावरून $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

उदा. $(-3)^2 \times (-3)^3$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^5$

यावरून $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

उदा. $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

यावरून $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

हे मला समजले.

- जर a ही परिमेय संख्या असेल आणि m व n हे धन पूर्णांक असतील, तर $a^m \times a^n = a^{m+n}$

सरावसंच 27

सोपे रूप द्या.

(i) $7^4 \times 7^2$ (ii) $(-11)^5 \times (-11)^2$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5$

(iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ (v) $a^{16} \times a^7$ (vi) $\left(\frac{P}{5}\right)^3 \times \left(\frac{P}{5}\right)^7$

जाणून घेऊया.

समान पाया असलेल्या घातांकित संख्यांचा भागाकार

उदा. $6^4 \div 6^2 = ?$

$$\frac{6^4}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6}{6\times6}$$
$$= 6 \times 6$$
$$= 6^2$$
$$\therefore 6^4 \div 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$$

उदा. $(-2)^5 \div (-2)^3 = ?$

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)}$$
$$= (-2)^2$$
$$\therefore (-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^2$$

हे मला समजले.

- जर a ही शून्येतर परिमेय संख्या, m व n हे धन पूर्णांक आणि $m > n$, असतील तर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a° चा अर्थ

$a \neq 0$ असेल तर

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ तसेच

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

$\therefore \boxed{a^0 = 1}$

a^{-m} चा अर्थ

$$a^{-m} = a^{-m} \times 1$$
$$= a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m}$$
$$= \frac{a^{-m+m}}{a^m}$$
$$= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$
$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\therefore$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

तसेच $a \times \frac{1}{a} = 1$ म्हणजे $a \times a^{-1} = 1$

$\therefore$ a^{-1} हा a चा गुणाकार व्यस्त आहे.

याप्रमाणे $\frac{5}{3}$ चा गुणाकार व्यस्त $\frac{3}{5}$ आहे.

$\therefore \boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}}$

उदा. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ ही घातांकित संख्या पाहू.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{64}{343}} = \frac{343}{64} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3}$$

हे मला समजले.

- यावरून जर, $a \neq 0$, $b \neq 0$, आणि m ही धन पूर्णांक संख्या असेल तर $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$.

खालील उदाहरणांचे निरीक्षण करून कोणता नियम मिळतो ते पाहू.

उदा. $(3)^4 \div (3)^6$

$$= \frac{3^4}{3^6}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\therefore\ 3^4 \div 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$$

उदा. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{5}$

$$= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{3}}$$

$$\therefore\ \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2-5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

हे मला समजले.

- जर a ही परिमेय संख्या असेल $a \neq 0$ आणि m व n या पूर्णांक संख्या असतील, तर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

जाणून घेऊया.

पाया (-1) असेल आणि घातांक पूर्ण संख्या असेल तर काय होते ते पाहा.

$$(-1)^6 = \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} = 1\times1\times1 = 1$$

$$(-1)^5 = \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} \times (-1) = 1\times1\times(-1) = -1$$

m ही सम संख्या असेल तर $(-1)^m = 1$ आणि m ही विषम संख्या असेल तर $(-1)^m = -1$

सरावसंच 28

1. सोपे रूप द्या.

   (i) $a^6 \div a^4$ (ii) $m^5 \div m^8$ (iii) $p^3 \div p^{13}$ (iv) $x^{10} \div x^{10}$

2. किंमत काढा.

   (i) $(-7)^{12} \div (-7)^{12}$ (ii) $7^5 \div 7^3$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3} \div \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$ (iv) $4^7 \div 4^5$

जाणून घेऊया.

दोन संख्यांच्या गुणाकाराचा व भागाकाराचा घात

खालील उदाहरणांचे निरीक्षण करून कोणता नियम मिळतो ते पाहू.

उदा. $(2 \times 3)^4$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

उदा. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3}$

हे मला समजले.

जर a व b या शून्येतर परिमेय संख्या असतील आणि m ही पूर्णांक संख्या असेल तर

(1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$\left(a^m\right)^n$ म्हणजे घातांकित संख्येचा घात

उदा. $\left(5^2\right)^3$

$= 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{2 \times 3}$

$= 5^6$

उदा. $\left(7^{-2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(7^{-2}\right)^5}$

$= \frac{1}{7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2}}$

$= \frac{1}{7^{(-2) \times 5}}$

$= \frac{1}{7^{-10}} = 7^{10}$

$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

उदा. $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^3$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-2)+(-2)+(-2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

$\left(a^m\right)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \,.........\, n$ वेळा $= a^{m+m+m.........\,n \text{ वेळा}} = a^{m \times n}$

वरील उदाहरणांवरून हा नियम मिळतो.

हे मला समजले.

- जर a ही शून्येतर परिमेय संख्या व m आणि n या पूर्णांक संख्या असतील, तर $\left(a^m\right)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$

घातांकांचे नियम

लक्षात ठेवा :

जर a आणि b या शून्येतर परिमेय संख्या, m, n हे पूर्णांक असतील तर,

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

सरावसंच 29

1. सोपे रूप द्या.

(i) $\left[\left(\frac{15}{12}\right)^3\right]^4$ (ii) $\left(3^4\right)^{-2}$ (iii) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\right)^4$ (iv) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^{-3}$ (v) $\left(6^5\right)^4$

(vi) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^5\right]^2$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^5$ (viii) $\left[\left(\frac{5}{8}\right)^3\right]^{-2}$ (ix) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^1$ (x) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^2$

2. खालील संख्या धन घातांक वापरून लिहा.

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ (iv) $(y)^{-4}$

गणित माझा सोबती : विज्ञानात, खगोलशास्त्रात

(1) दशमान पद्धतीत संख्या लिहिताना 10 च्या घातांकाचा विशेष उपयोग करता येतो. पृथ्वी व चंद्र यांतील अंतर 38,40,00,000 मीटर आहे. 10 चा घातांक वापरुन हे अंतर खालीलप्रमाणे लिहितात.

384 000 000 = 384×10^6

38 4000000 = 38.4×10^7

3 84000000 = 3.84×10^8 (प्रमाणित रूप)

(2) ऑक्सिजनच्या अणूचा व्यास मिमीमध्ये खाली दिला आहे.

0.0000000000000356 = 3.56×10^{-14}

(3) पुढील संख्या प्रमाणित रूपात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

सूर्याचा व्यास 1400000000 मीटर आहे.

प्रकाशाचा वेग = 300000000 मीटर/सेकंद आहे.

(4) शेजारील आकृतीमध्ये Googol ही संख्या दर्शवली आहे ती 10 च्या घातांकाच्या रूपात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

कोणतीही खूप मोठी अथवा खूप लहान संख्या लिहिताना एक अंकी पूर्णांक असलेली दशांश अपूर्णांकी संख्या व 10 चा योग्य घात यांचा गुणाकार करून लिहितात. याला त्या संख्येचे (Standard form) प्रमाणित रूप म्हणतात.

Googol

10000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000

जरा आठवूया.

पूर्ण वर्ग संख्येचे वर्गमूळ काढणे

दिलेल्या संख्येला त्याच संख्येने गुणले असता येणारा गुणाकार हा त्या संख्येचा वर्ग असतो.

उदा. $6 \times 6 = 6^2 = 36$

$6^2 = 36$ याचे वाचन आपण 6 चा वर्ग 36 आहे असे करतो.

उदा. $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ याचे वाचन (-5) चा वर्ग 25 असे आहे.

जाणून घेऊया.

✸ दिलेल्या संख्येचे वर्गमूळ काढणे.

उदा. $3 \times 3 = 3^2 = 9$ येथे 3 चा वर्ग 9 आहे.

हीच माहिती 9 चे वर्गमूळ 3 आहे अशा रूपात लिहिता येते.

वर्गमुळासाठी $\sqrt{}$ ही खूण वापरतात. $\sqrt{9}$ म्हणजे 9 चे वर्गमूळ $\therefore \sqrt{9} = 3$ आहे.

उदा. $7 \times 7 = 7^2 = 49$ $\therefore \sqrt{49} = 7$

उदा. $8 \times 8 = 8^2 = 64$ यावरून $\sqrt{64} = 8$

$(-8) \times (-8) = (-8)^2 = 64$ यावरून 64 चे वर्गमूळ -8 असेही मिळते.

x ही धन संख्या असेल तर तिची दोन वर्गमुळे असतात.

त्यांपैकी ऋण वर्गमूळ $-\sqrt{x}$ ने व धन वर्गमूळ $\sqrt{x}$ ने दर्शवले जाते.

उदा. 81 चे वर्गमूळ काढा.

$81 = 9 \times 9 = -9 \times -9$ $\therefore \sqrt{81} = 9$ आणि $-\sqrt{81} = -9$

आपण बहुतेक वेळा धन वर्गमुळाचा विचार करतो.

✸ दिलेल्या संख्येचे अवयव पद्धतीने वर्गमूळ काढणे.

उदा. 144 चे वर्गमूळ काढा.

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयवां पासून समान अवयवांच्या जोड्या करा.

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$144 = 2 \times 72$

$= 2 \times 2 \times 36$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 18$

$= \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

मिळालेल्या अवयवांमधील समान अवयवांच्या जोड्या तयार करा.

प्रत्येक जोडीतील एक अवयव घेऊन त्यांचा गुणाकार करा.

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

उदा. 324 चे वर्गमूळ काढा.

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयव काढून समान अवयवांच्या जोड्या करा.

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$
\begin{aligned}
324 &= 2 \times 162 \\
&= 2 \times 2 \times 81 \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 27 \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 \\
&= \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}
\end{aligned}
$$

वर्गमुळासाठी प्रत्येक जोडीतील एक संख्या घ्या व गुणाकार करा.

$\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

सरावसंच 30

⦿ वर्गमूळ काढा.

(i) 625 (ii) 1225 (iii) 289 (iv) 4096 (v) 1089

✸ अधिक माहितीसाठी (भागाकार पद्धतीने वर्गमूळ)

(1) 9801 चे वर्गमूळ काढा.

	99
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
+ 9	− 81
189	1701
+ 9	− 1701
198	0000

$\sqrt{9801} = 99$

(2) 19321 चे वर्गमूळ काढा.

	139
1	$\overline{1}\,\overline{93}\,\overline{21}$
+ 1	− 1
23	093
+ 3	− 69
269	2421
+ 9	− 2421
278	0000

(3) 141.61 चे वर्गमूळ काढा.

	11.9
1	$\overline{1}\,\overline{41}.\overline{61}$
+ 1	− 1
21	041
+ 1	− 21
229	2061
+ 9	− 2061
238	0000

ज्या संख्येचे मूळ अवयव फार मोठे आहेत व त्यामुळे अवयव पाडणे कठीण आहे, तिचे वर्गमूळ शोधण्यासाठी ही पद्धत उपयोगी पडते.

आता आणखी एक उपयोग पाहण्यासाठी $\sqrt{137}$ काढू.

	11.7
1	$\overline{1}\,\overline{37}.\overline{00}$
+ 1	− 1
21	037
+ 1	− 21
227	1600
+ 7	− 1589
234	11

$\sqrt{137} > 11.7$

पण $(11.8)^2 = 139.24$

$\therefore 11.7 < \sqrt{137} < 11.8$

याप्रमाणे $\sqrt{137}$ च्या जवळपासची संख्या शोधता येते.

ज्या संख्येचे वर्गमूळ पूर्ण संख्या नाही, तिच्या वर्गमुळाच्या जवळपासचा दशांश अपूर्णांक या पद्धतीने मिळू शकतो.