



जरा आठवूया.

- सर्वात लहान मूळ संख्या (prime number) कोणती ?
 - 1 ते 50 या संख्यांमध्ये किती मूळसंख्या आहेत ? त्यांची यादी करा.
 - खालील संख्यांपैकी ज्या संख्या मूळसंख्या आहेत, त्या संख्यांभोवती वर्तुळ करा.
17, 15, 4, 3, 1, 2, 12, 23, 27, 35, 41, 43, 58, 51, 72, 79, 91, 97
- सहमूळ संख्या** (coprime numbers) : ज्या दोन संख्यांचा सामाईक विभाजक फक्त 1 हाच असतो, त्या संख्या एकमेकींच्या सहमूळ संख्या आहेत असे म्हणतात. सहमूळ संख्यांना सापेक्ष मूळ संख्या (relatively prime numbers) असेही म्हणतात.
- जसे : 10 व 21 या संख्या सहमूळ संख्या आहेत. कारण 10 चे विभाजक : 1, 2, 5, 10 आणि 21 चे विभाजक 1, 3, 7, 21. या दोनही संख्यांच्या विभाजकांमध्ये 1 हा एकमेव सामाईक विभाजक आहे. (3, 8) ; (4, 9) ; (21, 22) ; (22, 23) ; (23, 24) या काही सहमूळ संख्या आहेत. दोन क्रमवार संख्या सहमूळ असतात याचा पडताळा घ्या.



जाणून घेऊया.

जोडमूळ संख्या (Twin prime numbers)

ज्या दोन मूळ संख्यांतील फरक 2 आहे, त्या दोन मूळ संख्यांना जोडमूळ संख्या असे म्हणतात.
जसे : (3, 5) ; (5, 7) ; (11, 13) ; (29, 31) इत्यादी.

सरावसंच 10

1. जी संख्या मूळ नाही आणि संयुक्तही नाही, अशी संख्या कोणती आहे ?
2. पुढील जोड्यांपैकी सहमूळ संख्यांच्या जोड्या ओळखा.
(i) 8, 14 (ii) 4, 5 (iii) 17, 19 (iv) 27, 15
3. 25 ते 100 पर्यंतच्या सर्व मूळ संख्यांची यादी करा. त्या किती आहेत ते लिहा.
4. 51 ते 100 पर्यंतच्या सर्व जोडमूळ संख्या लिहा.
5. 1 ते 50 मधील सहमूळ संख्यांच्या 5 जोड्या लिहा.
6. मूळ संख्यांपैकी समसंख्या कोणत्या ?



जाणून घेऊया.

संख्येचे मूळ अवयव पाडणे (Prime factorisation of a number)

संख्यांचा लसावि व मसावि काढण्यासाठी युक्लिडचा एक सोपा व महत्त्वाचा नियम अनेकदा वापरला जातो. “कोणतीही संयुक्त संख्या ही मूळ संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिता येते” हा तो नियम आहे.

संख्यांचे मूळ अवयव कसे पाडायचे ते पाहू.

उदा. 24 ही संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहा.

मूळ अवयव काढण्याची पद्धत

उभी मांडणी

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

आडवी मांडणी

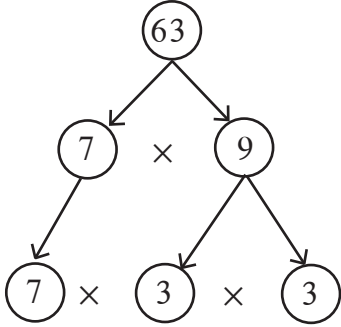
$$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times 2 \times 6 \quad \dots 12 \text{ चे अवयव पाडले आहेत.} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \quad \dots 6 \text{ चे अवयव पाडले आहेत.} \end{aligned}$$

2 व 3 हे मूळ अवयव आहेत.

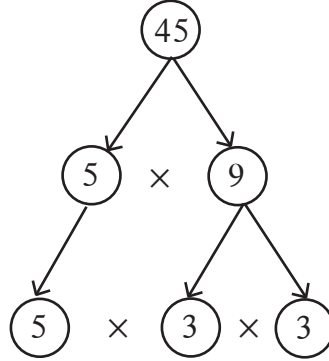
लक्षात ठेवा :

दिलेली संख्या तिच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिणे म्हणजे त्या संख्येचे मूळ अवयव पाडणे होय.

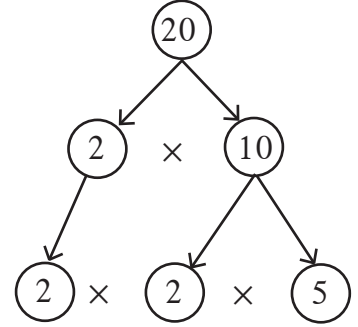
उदा. खाली दिलेल्या संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकार रूपात लिहा.



$$63 = 7 \times 3 \times 3$$



$$45 = 5 \times 3 \times 3$$



$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

उदा. 117 चे मूळ अवयव पाडा.

3	117
3	39
13	13
	1

$$\begin{aligned} 117 &= 13 \times 9 \\ &= 13 \times 3 \times 3 \end{aligned}$$

$$117 = 3 \times 3 \times 13$$

उदा. 250 चे मूळ अवयव पाडा.

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$$\begin{aligned} 250 &= 2 \times 125 \\ &= 2 \times 5 \times 25 \\ &= 2 \times 5 \times 5 \times 5 \end{aligned}$$

$$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

उदा. 40 चे मूळ अवयव पाडा.

उभी मांडणी

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

$$40 = 10 \times 4$$

$$= 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

आडवी मांडणी

$$40 = 8 \times 5$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

सरावसंच 11

⊙ खालील संख्यांचे मूळ अवयव पाडा.

(i) 32

(ii) 57

(iii) 23

(iv) 150

(v) 216

(vi) 208

(vii) 765

(viii) 342

(ix) 377

(x) 559



जरा आठवूया.

महत्तम सामाईक विभाजक (मसावि)

[Greatest Common Divisor, (GCD) or Highest Common Factor (HCF)]

आपण धन पूर्णांक संख्यांचे मसावि आणि लसावि अभ्यासले आहेत. आता त्यांचा आणखी थोडा अभ्यास करू. दिलेल्या संख्यांचा मसावि म्हणजे त्या संख्यांचा सर्वात मोठा सामाईक विभाजक असतो.

• खालील प्रत्येक उदाहरणात संख्यांचे सर्व विभाजक लिहा व मसावि काढा.

(i) 28, 42

(ii) 51, 27

(iii) 25, 15, 35



जाणून घेऊया.

मूळ अवयव पद्धती : मूळ अवयव पाडून संख्यांचा मसावि काढणे सोपे जाते.

उदा. मूळ अवयव पद्धतीने 24 व 32 यांचा मसावि काढा.

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$$24 = 4 \times 6$$

$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3$$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$32 = 8 \times 4$$

$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2$$

प्रत्येक संख्येमध्ये 2 हा सामाईक अवयव 3 वेळा येतो म्हणून मसावि = $2 \times 2 \times 2 = 8$

उदा. 195, 312 व 546 यांचा मसावि काढा.

$$195 = 5 \times 39$$

$$= 5 \times \underline{3} \times \underline{13}$$

$$312 = 4 \times 78$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 39$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$$

$$546 = 2 \times 273$$

$$= 2 \times 3 \times 91$$

$$= 2 \times \underline{3} \times \underline{7} \times \underline{13}$$

प्रत्येक संख्येमध्ये 3 व 13 हे सामाईक अवयव एकेकदा आले आहेत.

$$\therefore \text{मसावि} = 3 \times 13 = 39$$

उदा. 10, 15 व 12 यांचा मसावि काढा.

$$10 = 2 \times 5$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

या संख्यांमध्ये कोणतीही मूळ संख्या सामाईक विभाजक नाही. 1 हा एकच सामाईक विभाजक आहे.

म्हणून मसावि = 1

उदा. 60, 12 व 36 यांचा मसावि काढा.

$$60 = 4 \times 15$$

$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$$

$$12 = 2 \times 6$$

$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3}$$

$$36 = 3 \times 12$$

$$= 3 \times 3 \times 4$$

$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$$

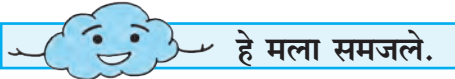
$$\therefore \text{मसावि} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

हे उदाहरण उभ्या मांडणीने करू. एकाच वेळी सर्व संख्या लिहून मूळ अवयव काढू.

2	60	12	36
2	30	6	18
3	15	3	9
	5	1	3

$$\therefore \text{मसावि} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

लक्षात घ्या, की 12 हा 36 व 60 चा विभाजक आहे.



हे मला समजले.

- दिलेल्या संख्यांपैकी एक संख्या इतर संख्यांची विभाजक असेल तर ती संख्या त्या दिलेल्या संख्यांचा मसावि असते.
- दिलेल्या संख्यांसाठी एकही मूळ संख्या सामाईक अवयव नसेल, तर त्या संख्यांचा मसावि 1 असतो कारण 1 हा त्यांचा एकमेव सामाईक विभाजक असतो.

* अधिक माहितीसाठी

दोन क्रमागत सम संख्यांचा मसावि 2 असतो आणि दोन क्रमागत विषम संख्यांचा मसावि 1 असतो.

हे नियम विविध उदाहरणे घेऊन पडताळून पाहा.

मसावि काढण्याची भागाकार पद्धत

उदा. 144 आणि 252 चा मसावि काढा.

$$\begin{array}{r} 144 \overline{)252} (1 \\ \underline{-144} \\ 108 \overline{)144} (1 \\ \underline{-108} \\ 36 \overline{)108} (3 \\ \underline{-108} \\ 000 \end{array}$$

- (1) मोठ्या संख्येला लहान संख्येने भागा.
 - (2) या भागाकारात मिळणाऱ्या बाकीने आधीच्या भाजकाला भागा.
 - (3) पायरी 2 मध्ये भागाकाराने मिळणाऱ्या बाकीने पायरी 2 मधील भाजकाला भागा व बाकी काढा.
 - (4) याप्रमाणे बाकी शून्य मिळेपर्यंत क्रिया करा.
ज्या भागाकारात बाकी शून्य मिळाली त्या भागाकारातील भाजक हा आधी दिलेल्या संख्यांचा मसावि आहे.
- ∴ 144 व 252 यांचा मसावि = 36

उदा. $\frac{209}{247}$ या संख्येला संक्षिप्त रूप द्या.

संक्षिप्त रूप देण्यासाठी दोन्ही संख्यांचा सामाईक अवयव शोधू.
यासाठी 247 व 209 यांचा मसावि भागाकार पद्धतीने काढू.
येथे 19 हा मसावि आहे म्हणजे अंशस्थानी व छेदस्थानी
असणाऱ्या संख्यांना 19 ने भाग जाईल.

$$\therefore \frac{209}{247} = \frac{209 \div 19}{247 \div 19} = \frac{11}{13}$$

$$\begin{array}{r} 209 \overline{)247} (1 \\ \underline{-209} \\ 38 \overline{)209} (5 \\ \underline{-190} \\ 19 \overline{)38} (2 \\ \underline{-38} \\ 00 \end{array}$$

सरावसंच 12

1. मसावि काढा.

- | | | | |
|----------------|-------------------|------------------|--------------------|
| (i) 25, 40 | (ii) 56, 32 | (iii) 40, 60, 75 | (iv) 16, 27 |
| (v) 18, 32, 48 | (vi) 105, 154 | (vii) 42, 45, 48 | (viii) 57, 75, 102 |
| (ix) 56, 57 | (x) 777, 315, 588 | | |

2. भागाकार पद्धतीने मसावि काढा व संक्षिप्त रूप द्या.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| (i) $\frac{275}{525}$ | (ii) $\frac{76}{133}$ | (iii) $\frac{161}{69}$ |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|



जरा आठवूया.

लघुतम सामाईक विभाज्य (लसावि) [Least common multiple (LCM)]

दिलेल्या संख्यांचा लसावि म्हणजे त्यांपैकी प्रत्येक संख्येने विभाज्य अशी लहानांत लहान संख्या असते.

- खाली दिलेल्या संख्यांचे पाढे लिहा व त्यांचे लसावि काढा.

- | | | |
|----------|------------|----------------|
| (i) 6, 7 | (ii) 8, 12 | (iii) 5, 6, 15 |
|----------|------------|----------------|



जाणून घेऊया.

उदा. 60 व 48 यांचा लसावि काढा.

प्रत्येक संख्येचे मूळ अवयव पाहू.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

वरील गुणाकारांत येणारी प्रत्येक मूळ संख्या पाहू.

2 ही संख्या जास्तीत जास्त 4 वेळा आली आहे. (48 च्या अवयवामध्ये)

3 ही संख्या जास्तीत जास्त 1 वेळा आली आहे. (60 च्या अवयवामध्ये)

5 ही संख्या जास्तीत जास्त 1 वेळा आली आहे. (60 च्या अवयवामध्ये)

$$\therefore \text{लसावि} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 10 \times 24 = 240$$

उदा. 18, 30 व 50 यांचा लसावि काढूया.

$$18 = 2 \times 9$$

$$= 2 \times 3 \times 3$$

$$30 = 2 \times 15$$

$$= 2 \times 3 \times 5$$

$$50 = 2 \times 25$$

$$= 2 \times 5 \times 5$$

वर दिलेल्या गुणाकारात 2, 3 व 5 या मूळ संख्या येतात.

2 ही संख्या जास्तीत जास्त वेळा, 3 ही संख्या जास्तीत जास्त वेळा व 5 ही संख्या जास्तीत जास्त वेळा आली आहे.

$$\therefore \text{लसावि} = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 450 \quad \therefore 18, 30, 50 \text{ यांचा लसावि } 450 \text{ आहे.}$$

उदा. 16, 28 व 40 यांचा लसावि काढा.

उभी मांडणी

2	16	28	40
2	8	14	20
2	4	7	10
	2	7	5

- विभाज्यतेच्या कसोट्या वापरून सर्व संख्यांना भाग जाणाऱ्या संख्या शोधा व तिने दिलेल्या संख्यांना भागा. भागाकाराने मिळालेल्या संख्यांसाठी हीच क्रिया शक्य तेवढ्या वेळा करा.
- आता मिळालेल्या संख्यांपैकी कमीत कमी दोन संख्यांची विभाजक असलेली संख्या शोधून तिने ज्यांना भाग जातो त्या संख्यांना भागा. ज्या संख्येला भाग जात नाही, ती तशीच ठेवा. हीच क्रिया शक्य तेवढ्या वेळा करा.
- 1 शिवाय इतर कोणताही साधारण अवयव नसल्यास भागाकार थांबवा.
- डाव्या स्तंभातील संख्यांचा गुणाकार करा. त्याला सर्वांत खालच्या आडव्या ओळीतील संख्यांनी गुणा.

$$\therefore \text{लसावि} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$$

उदा. 18 व 30 यांचा लसावि व मसावि काढा. त्यांचा गुणाकार व दिलेल्या

संख्यांचा गुणाकार यांची तुलना करा.

$$\text{मसावि} = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{लसावि} = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$$

$$\text{मसावि} \times \text{लसावि} = 6 \times 90 = 540$$

$$\text{दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार} = 18 \times 30 = 540$$

$$\text{दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार} = \text{मसावि} \times \text{लसावि}$$

2	18	30
3	9	15
	3	5

यावरून असे दिसते की दोन संख्यांचा गुणाकार त्या दोन संख्यांचा मसावि व लसावि यांच्या गुणाकाराएवढा असतो. या विधानाचा पडताळा खालील संख्यांच्या जोड्यांसाठी घ्या.

(15, 48), (14, 63), (75, 120)

उदा . 15, 45 व 105 यांचा लसावि व मसावि काढा.

3	15	45	105
5	5	15	35
	1	3	7

$$15 = \underline{3} \times \underline{5}$$

$$45 = \underline{3} \times \underline{3} \times \underline{5}$$

$$105 = \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{7}$$

$$\text{मसावि} = \underline{3} \times \underline{5} = 15$$

$$\text{लसावि} = \underline{3} \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{7} = 315$$

उदा. दोन अंकी दोन संख्यांचा गुणाकार 1280 आहे आणि त्यांचा मसावि 4 आहे, तर त्यांचा लसावि काढा.

मसावि \times लसावि = दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार

$$4 \times \text{लसावि} = 1280$$

$$\therefore \text{लसावि} = \frac{1280}{4} = 320$$

सरावसंच 13

1. लसावि काढा.

- (i) 12, 15 (ii) 6, 8, 10 (iii) 18, 32 (iv) 10, 15, 20 (v) 45, 86
 (vi) 15, 30, 90 (vii) 105, 195 (viii) 12, 15, 45 (ix) 63, 81
 (x) 18, 36, 27

2. खाली दिलेल्या संख्यांचा मसावि आणि लसावि काढा. त्यांचा गुणाकार हा दिलेल्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराएवढा असतो याचा पडताळा घ्या.

- (i) 32, 37 (ii) 46, 51 (iii) 15, 60 (iv) 18, 63 (v) 78, 104

लसावि व मसावि यांचा उपयोग

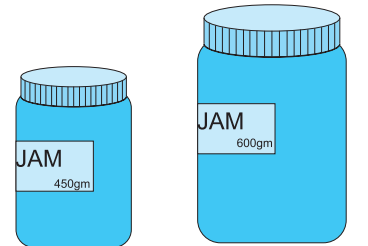
उदा. दुकानात 450 ग्रॅम जॅमची लहान बाटली 96 रुपयांना आहे व त्याच जॅमची 600 ग्रॅम वजनाची मोठी बाटली 124 रुपयांना आहे, तर कोणती बाटली खरेदी करणे जास्त फायदेशीर आहे ?

उकल : आपण एकमान पद्धत शिकलो आहोत. त्याप्रमाणे प्रत्येक बाटलीतील 1 ग्रॅम जॅमची किंमत काढून तुलना करू शकतो. पण लहान सामाईक अवयव घेण्यापेक्षा मोठा सामाईक अवयव घेतल्यास आकडेमोड सोपी होते.

450 व 600 चा मसावि 150 आहे याचा वापर करू.

$$450 = 150 \times 3,$$

$$600 = 150 \times 4$$



∴ लहान बाटलीतील 150 ग्रॅम जॅमची किंमत $\frac{96}{3} = 32$ रुपये

मोठ्या बाटलीतील 150 ग्रॅम जॅमची किंमत $\frac{124}{4} = 31$ रुपये

∴ 600 ग्रॅम जॅमची बाटली खरेदी करणे जास्त फायदेशीर आहे.

उदा. बेरीज करा. $\frac{17}{28} + \frac{11}{35}$ रीत 1 : बेरीज करण्यासाठी अपूर्णाकांचे छेद समान करू.

उकल : $\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17 \times 35 + 11 \times 28}{28 \times 35} = \frac{595 + 308}{28 \times 35} = \frac{903}{28 \times 35} = \frac{903}{980} = \frac{129}{140}$

रीत 2: बेरीज करण्यासाठी 28 व 35 यांचा लसावि काढू.

उकल : लसावि = $7 \times 4 \times 5 = 140$

$$\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17 \times 5}{28 \times 5} + \frac{11 \times 4}{35 \times 4} = \frac{85 + 44}{140} = \frac{129}{140}$$

छेदांचा गुणाकार करण्याऐवजी लसावि घेतल्यामुळे आपली आकडेमोड किती सोपी झाली बरे !

उदा. एका संख्येला अनुक्रमे 8, 10, 12, 14 या संख्यांनी भागले असता प्रत्येक वेळी बाकी 3 उरते, तर अशी लहानांत लहान संख्या कोणती आहे ?

2	8	10	12	14
2	4	5	6	7
	2	5	3	7

उकल : भाज्य संख्या शोधण्यासाठी दिलेल्या भाजकांचा लसावि काढू.

लसावि = $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 = 840$

त्या लसावामध्ये प्रत्येक वेळी मिळणारी बाकी मिळवू.

ती संख्या = लसावि + बाकी = $840 + 3 = 843$

उदा. 16,20,80 या संख्यांचा लसावि काढा.

उकल : $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$20 = 2 \times 2 \times 5$

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

लसावि = $4 \times 4 \times 5 = 80$

येथे एक गंमत दिसली का ? 80 ही दिलेल्या संख्यांपैकी एक

आहे आणि 16 व 20 या दिलेल्या इतर संख्या तिच्या विभाजक आहेत.

4	16	20	80
4	4	5	20
5	1	5	5
	1	1	1

लक्षात ठेवा :

दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वांत मोठ्या संख्येच्या इतर संख्या विभाजक असतात त्या वेळी ती मोठी संख्या दिलेल्या संख्यांचा लसावि असते.

वरील नियम पडताळण्यासाठी (18,90) (35,140,70) हे संख्यासमूह तपासा.

उदा. श्रेयस, शलाका आणि स्नेहल एका वर्तुळाकार धावपट्टीच्या एका ठिकाणावरून एकाच वेळी पळण्यास सुरुवात करतात व अनुक्रमे 16, 24 व 18 मिनिटांत एक फेरी पूर्ण करतात, तर ते तिघेही कमीत कमी किती वेळानंतर सुरुवातीच्या ठिकाणावर एकाच वेळी येतील ?

उकल: ज्या वेळानंतर ते एकत्र येतील, ती वेळ 16, 24, व 18 यांच्या पटीत असेल. ती कमीत कमी किती असेल ते शोधण्यासाठी लसावि काढू.

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$\text{लसावि} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$$

144 मिनिटांनी किंवा 2 तास 24 मिनिटांनी ते एकत्र येतील.

सरावसंच 14

- योग्य पर्याय निवडा.
 - 120 व 150 यांचा मसावि आहे.
 - 30
 - 45
 - 20
 - 120
 - खालीलपैकी या संख्यांचा मसावि 1 नाही.
 - 13, 17
 - 29, 20
 - 40, 20
 - 14, 15
- मसावि व लसावि काढा.
 - 14, 28
 - 32, 16
 - 17, 102, 170
 - 23, 69
 - 21, 49, 84
- लसावि काढा.
 - 36, 42
 - 15, 25, 30
 - 18, 42, 48
 - 4, 12, 20
 - 24, 40, 80, 120
- एका संख्येला 8, 9, 10, 15, 20 या संख्यांनी भागले असता प्रत्येक वेळी 5 बाकी उरते, तर अशी लहानांत लहान संख्या लिहा.
- $\frac{348}{319}$, $\frac{221}{247}$, $\frac{437}{551}$ या अपूर्णाकांना संक्षिप्त रूप द्या.
- दोन संख्यांचा लसावि व मसावि अनुक्रमे 432 व 72 आहे. दोन संख्यांपैकी एक संख्या 216 असेल तर दुसरी संख्या काढा.
- दोन अंकी दोन संख्यांचा गुणाकार 765 आहे आणि त्यांचा मसावि 3 आहे, तर त्यांचा लसावि काढा.
- एका विक्रेत्याजवळ 392 मीटर, 308 मीटर, 490 मीटर लांबीच्या प्लॅस्टिकच्या दोऱ्यांची तीन गुंडाळी आहेत. दोरी उरणार नाही अशाप्रकारे त्या तीनही गुंडाळ्यांतील दोरीचे सारख्या लांबीचे तुकडे पाडले, तर प्रत्येक तुकडा जास्तीत जास्त किती लांबीचा झाला असेल ?
- *. दोन क्रमागत सम संख्यांचा लसावि 180 आहे, तर त्या संख्या कोणत्या ?

