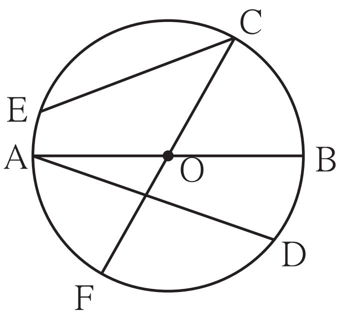
11 वर्तुळ

जरा आठवूया.



- शेजारील वर्तुळातील त्रिज्या, जीवा व व्यास ओळखा व त्यांची नावे खालील सारणीत लिहा.

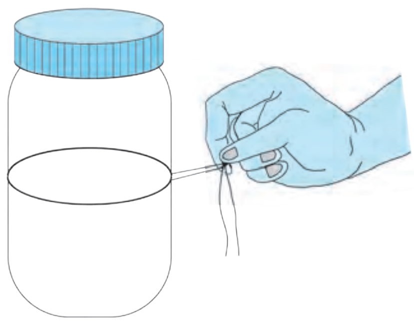
त्रिज्या				
जीवा				
व्यास				

वर्तुळाचा परीघ (Circumference of a circle)

कृती I पाण्याची दंडगोलाकृती बाटली कागदावर ठेवून तळाभोवती वर्तुळ काढा. दोऱ्याच्या साहाय्याने वर्तुळाचा परीघ मोजा.

कृती II बांगडीचा परीघ दोऱ्याने मोजा.

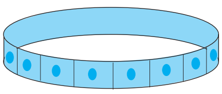
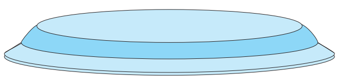
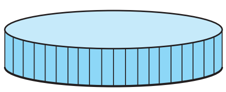
कृती III कोणत्याही एका वर्तुळाकार वस्तूचा दोऱ्याच्या साहाय्याने परीघ मोजा.



जाणून घेऊया.

परीघ व व्यास संबंध

कृती I खाली दिलेल्या वस्तूंचे परीघ व व्यास मोजून परिघाचे व्यासाशी असणारे गुणोत्तर सारणीत लिहा.

अ. क्र.	वस्तू	परीघ	व्यास	परिघाचे व्यासाशी गुणोत्तर
1.	 बांगडी	19 सेमी	6 सेमी	$\frac{19}{6} = 3.16$
2.	वर्तुळाकार पालथी थाळी 	....	....	....
3.	 बरणीचे झाकण	....	....	....

सारणीवरून परिघाचे व्यासाशी असलेले गुणोत्तर तपासा. आपणांस काय आढळून येते ?

कोणत्याही वर्तुळाच्या परिघाचे त्याच्या व्यासाशी असणारे गुणोत्तर तिपटीपेक्षा किंचित जास्त असून जवळपास स्थिर असते. ही स्थिर संख्या π (पाय) या ग्रीक वर्णाक्षराने दर्शवली जाते. ही संख्या परिमेय संख्या नाही हे थोर गणितज्ज्ञांनी परिश्रमाने सिद्ध केले आहे. व्यवहारामध्ये π ची किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 अशी घेतली जाते. उदाहरणात π ची किंमत दिली नसेल तर ती $\frac{22}{7}$ असे गृहीत धरतात.

त्रिज्या 'r', व्यास 'd' व परीघ 'c' असल्यास $\frac{\text{परीघ (c)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi$ म्हणजेच $\boxed{c = \pi d}$

पण $d = 2r$ $\therefore c = \pi \times 2r$ म्हणजेच $\boxed{c = 2\pi r}$

उदा. एका वर्तुळाचा व्यास 14 सेमी आहे, तर त्याचा परीघ काढा.

उकल : वर्तुळाचा व्यास : $d = 14$ सेमी

वर्तुळाचा परीघ $= \pi d$

$c = \frac{22}{7} \times 14$

$\therefore$ वर्तुळाचा परीघ = 44 सेमी

उदा. एका वर्तुळाची त्रिज्या 35 सेमी आहे, तर त्याचा परीघ काढा.

उकल : वर्तुळाची त्रिज्या : $r = 35$ सेमी

वर्तुळाचा परीघ $= 2\pi r$

$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 35$

$\therefore$ वर्तुळाचा परीघ = 220 सेमी

उदा. एका वर्तुळाचा परीघ 198 सेमी आहे, तर त्याची त्रिज्या व व्यास काढा.

उकल : वर्तुळाचा परीघ, $c = 2\pi r$

$198 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$r = 198 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$

त्रिज्या = 31.5 सेमी

$\therefore$ व्यास = 2 × 31.5 = 63 सेमी

उदा. एका वर्तुळाचा परीघ 62.80 सेमी आहे. $\pi = 3.14$ घेऊन वर्तुळाचा व्यास काढा.

उकल : वर्तुळाचा परीघ, $c = \pi d$

$62.80 = 3.14 \times d$

$\frac{62.80}{3.14} = d$

$20 = d$

$\therefore$ व्यास = 20 सेमी

उदा. एका वर्तुळाकार जागेची त्रिज्या 7.7 मीटर आहे. त्या जागेस तीन पदरी तारेचे कुंपण घालण्यासाठी प्रतिमीटर 50 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?

उकल : वर्तुळाकार जागेचा परीघ $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7.7 = 48.4$

एकपदरी कुंपण घालण्यासाठी लागणाऱ्या तारेची लांबी = 48.4 मी

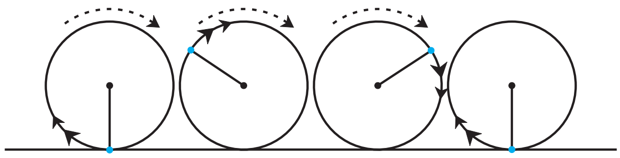
एकपदरी कुंपणाचा खर्च = तारेची लांबी × प्रतिमीटर दर

= 48.4 × 50

= 2420 रुपये

$\therefore$ तीनपदरी कुंपणाचा खर्च = 3 × 2420 = 7260 रुपये

उदा. एका बसच्या चाकाचा व्यास 0.7 मी आहे. दोन गावांमधील 22 किमी अंतर पूर्ण करण्यासाठी चाकाचे किती फेरे होतील ?



उकल : चाकाचा परीघ $= \pi d$

$= \frac{22}{7} \times 0.7$

$= 2.2$ मी

सजातीय राशींचे गुणोत्तर काढताना त्यांची एकके समान असावी लागतात.

22 किमी = $22 \times 1000 = 22000$ मीटर

म्हणजे चाकाचा एक फेरा पूर्ण झाला की 2.2 मी. अंतर पार होते. (1 फेरा = 1 परीघ)

चाकाचे एकूण फेरे = $\frac{\text{अंतर}}{\text{परीघ}} = \frac{22000}{2.2} = \frac{220000}{22} = 10000$

22 किमी अंतर पूर्ण करण्यासाठी बसच्या चाकाचे 10000 फेरे होतील.

सरावसंच 42

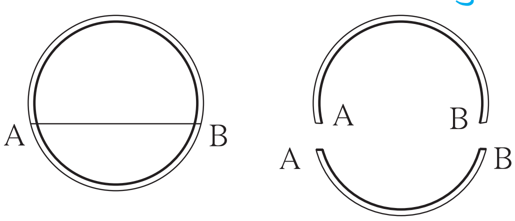
1. खालील सारणी पूर्ण करा.

अ.क्र.	त्रिज्या (r)	व्यास (d)	परीघ (c)
(i)	7 सेमी	....	....
(ii)	....	28 सेमी	....
(iii)	....	....	616 सेमी
(iv)	....	....	72.6 सेमी

2. एका वर्तुळाचा परीघ 176 सेमी आहे. तर त्याची त्रिज्या काढा.
3. एका वर्तुळाकार बागेची त्रिज्या 56 मीटर आहे. बागेभोवती तारेचे चार पदरी कुंपण घालण्यासाठी प्रतिमीटर 40 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?
4. एका बैलगाडीच्या चाकाचा व्यास 1.4 मीटर आहे. त्या बैलगाडीला 1.1 किलोमीटर अंतर पूर्ण करण्यासाठी तिच्या चाकाचे किती फेरे होतील ?

जरा आठवूया.

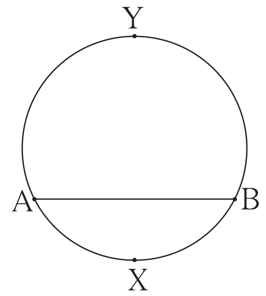
वर्तुळकंस (Arc of the circle)



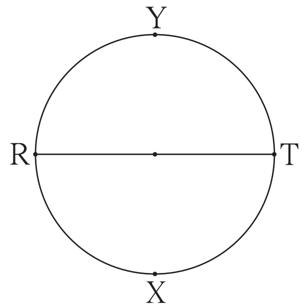
बाजूला एक प्लॅस्टिकची वर्तुळाकार बांगडी दाखवली आहे. समजा ही बांगडी A व B बिंदूपाशी तुटली, तर चित्रातील बांगडीच्या प्रत्येक तुकड्याला वर्तुळाच्या संदर्भात काय म्हणतात ?

जाणून घेऊया.

सोबतच्या आकृतीमध्ये जीवा AB मुळे वर्तुळाचे दोन भाग झाले आहेत. त्यांपैकी कंस AXB हा लहान आहे, त्याला **लघुकंस** म्हणतात आणि कंस AYB हा मोठा आहे, त्याला **विशालकंस** म्हणतात. लघुकंस AXB हा कंस AB असाही लिहितात.



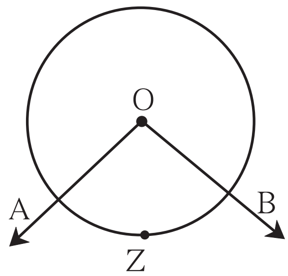
ज्या दोन वर्तुळकंसांचे अंत्यबिंदू सामाईक असतात आणि ते दोन वर्तुळकंस मिळून वर्तुळ पूर्ण होते, ते कंस एकमेकांचे संगतकंस असतात. येथे कंस AYB व कंस AXB हे एकमेकांचे संगतकंस आहेत.



सोबतच्या आकृतीमध्ये जीवा RT हा वर्तुळाचा व्यास आहे. व्यासामुळे वर्तुळाचे दोन्ही कंस समान होतात. त्यांना **अर्धवर्तुळकंस** म्हणतात, हे ध्यानात घ्या.

केंद्रीय कोन व कंसाचे माप (Central angle and Measure of an arc)

सोबतच्या आकृतीमध्ये, वर्तुळकेंद्र 'O' हा ∠AOB चा शिरोबिंदू आहे. वर्तुळाचा केंद्रबिंदू हा ज्या कोनाचा शिरोबिंदू असतो. त्या कोनाला **केंद्रीय कोन** म्हणतात. आकृतीतील ∠AOB हा कंस AZB शी निगडित केंद्रीय कोन आहे. **वर्तुळ कंसाने केलेल्या केंद्रीय कोनाचे माप हे त्या कंसाचे माप मानले जाते.**

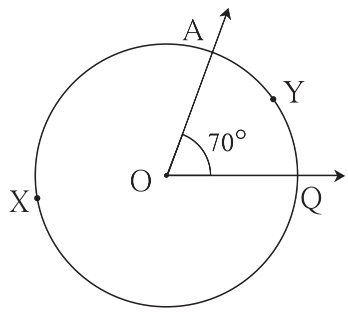


✸ लघुकंसाचे माप

शेजारील आकृतीमध्ये ∠AOQ या केंद्रीय कोनाचे माप 70° आहे.

∴ लघुकंस AYQ चे माप 70° आहे.

∴ *m*(कंस AYQ) = 70° असे लिहितात.

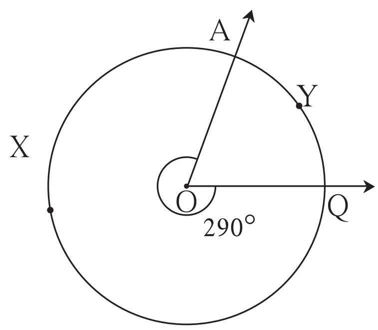


✸ विशालकंसाचे माप

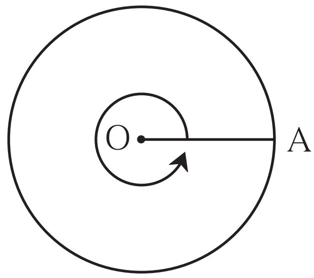
विशालकंसाचे माप = 360°– संगत लघुकंसाचे माप

∴ आकृतीतील विशालकंस AXQ चे माप

360° - 70° = 290° आहे.

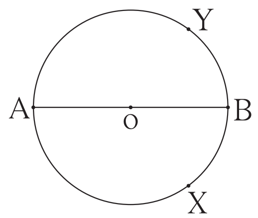


✸ वर्तुळाचे माप



आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळाची OA ही त्रिज्या घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने पूर्ण कोनातून फिरते. त्या वेळी होणारा कोन 360°मापाचा आहे. तिचे A हे टोक एक वर्तुळ पूर्ण करते. वर्तुळाने केलेला केंद्रीय कोन 360°आहे.
$\therefore$ पूर्ण वर्तुळाचे माप 360° असते.

✸ अर्धवर्तुळकंसाचे माप



आता, आकृतीवरून अर्धवर्तुळ कंस AXB व अर्धवर्तुळकंस AYB यांची मापे ठरवा.

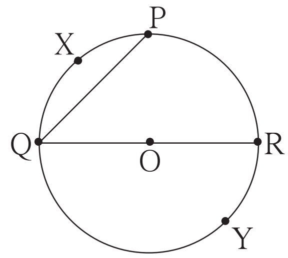
हे मला समजले.

- लघुकंसाचे माप हे त्याच्या संबंधित केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.
- विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप
- अर्धवर्तुळकंसाचे माप 180° असते.

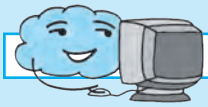
सरावसंच 43

1. अचूक पर्याय निवडा.
   जर कंस AXB व कंस AYB हे एकमेकांचे संगतकंस असतील आणि m(कंस AXB) = 120° तर m(कंस AYB) = किती ?
   (i) 140° (ii) 60° (iii) 240° (iv) 160°

2. 'O' केंद्र असलेल्या वर्तुळात काही कंस दाखवले आहेत. त्यांपैकी वर्तुळामधील लघुकंस, विशालकंस व अर्धवर्तुळकंस यांची नावे लिहा.



3. O केंद्र असलेल्या वर्तुळात लघुकंस PXQ चे माप 110° आहे, तर विशालकंस PYQ चे माप काढा.



ICT Tools or Links

Geogebra Software चा उपयोग करून केंद्रीय कोन आणि कंसाची विविध मापे यांचा सहसंबंध move option चा उपयोग करून अनुभवा.