4 भौमितिक रचना

चला, शिकूया.

- समरूप त्रिकोणाची रचना
  - ✻ दोन समरूप त्रिकोणांपैकी एका त्रिकोणाच्या बाजू आणि दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजू यांचे गुणोत्तर दिले असता दुसरा त्रिकोण काढणे.
    - (i) एकही शिरोबिंदू सामाईक नसताना.
    - (ii) एक शिरोबिंदू सामाईक असताना.
- वर्तुळाची स्पर्शिका काढणे.
  - ✻ वर्तुळाला वर्तुळावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.
    - (i) वर्तुळकेंद्राचा उपयोग करून.
    - (ii) वर्तुळकेंद्राचा उपयोग न करता.
  - ✻ वर्तुळाला त्याच्या बाहेरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.

जरा आठवूया.

खालील रचना आपण आधीच्या इयत्तांमध्ये शिकलो आहोत. त्या रचनांची उजळणी करा.

- दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून समांतर रेषा काढणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.
- त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यांपैकी पुरेसे घटक दिले असता त्रिकोण काढणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या संख्येएवढे समान भाग करणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात विभाजन करणे.
- दिलेल्या कोनाशी एकरूप असलेला कोन काढणे.

इयत्ता नववीत तुम्ही शाळेच्या परिसराचा नकाशा तयार करण्याचा उपक्रम केला आहे. एखादी इमारत बांधण्यापूर्वी त्या इमारतीचा आराखडा तयार करतात. शाळेचा परिसर आणि त्याचा नकाशा, इमारत आणि तिचा आराखडा परस्परांशी समरूप असतात. भूगोल, वास्तुशास्त्र, यंत्रशास्त्र इ. क्षेत्रांमध्ये समरूप आकृत्या काढण्याची गरज असते. त्रिकोण ही सर्वांत साधी बंदिस्त आकृती आहे. म्हणून दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप त्रिकोण कसा काढता येतो, हे पाहूया.

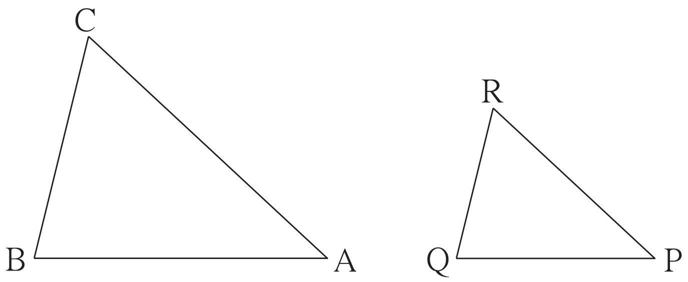
जाणून घेऊया.

समरूप त्रिकोणाची रचना

एका त्रिकोणाच्या बाजू दिल्या असता, त्याच्याशी समरूप असणारा आणि गुणोत्तराची अट पूर्ण करणारा त्रिकोण काढणे.

दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात आणि त्यांचे संगत कोन एकरूप असतात. याचा उपयोग करून दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असणारा त्रिकोण काढता येतो.

उदा. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, Δ ABC मध्ये AB = 5.4 सेमी, BC = 4.2 सेमी, AC = 6.0 सेमी. AB: PQ = 3:2 तर Δ ABC आणि Δ PQR काढा.



आकृती 4.1
कच्ची आकृती

प्रथम दिलेल्या मापांचा Δ ABC काढा.

Δ ABC आणि Δ PQR समरूप आहेत.

$\therefore$ त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात आहेत.

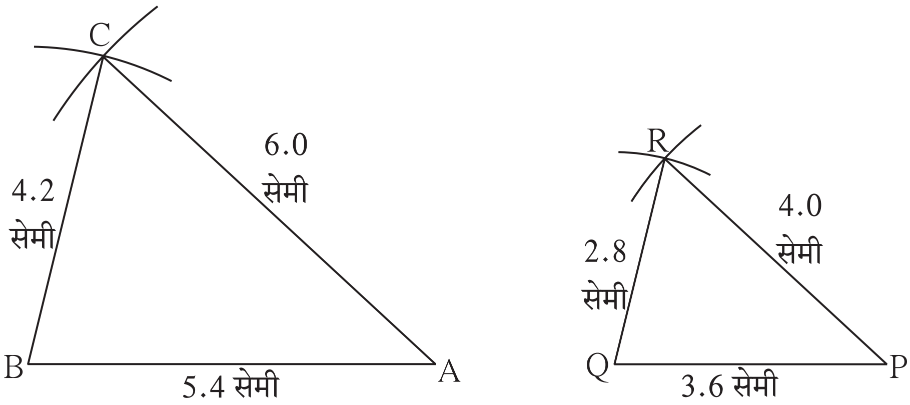
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

AB, BC, AC या बाजूंच्या लांबी माहीत असल्याने वरील समीकरणांवरून PQ, QR, PR या बाजूंच्या लांबी मिळतील.

समीकरण [I] वरून

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 सेमी, QR = 2.8 सेमी आणि PR = 4.0 सेमी



आकृती 4.2

Δ PQR च्या सर्व बाजूंच्या लांबी माहीत झाल्याने आपण त्या त्रिकोणाची रचना करू.

अधिक माहितीसाठी

काही वेळा, दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असणारा जो त्रिकोण काढावयाचा आहे, त्याच्या बाजू मोजपट्टीने मोजून काढता येण्यासारख्या नसतात. अशावेळी, दिलेल्या रेषाखंडाचे 'दिलेल्या संख्येएवढे भाग करणे' या रचनेचा उपयोग करून त्रिकोणाच्या बाजू काढता येतात.

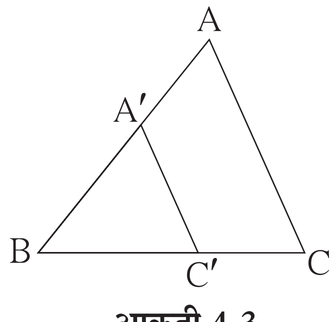
उदाहरणार्थ. बाजू AB ची लांबी $\frac{11.6}{3}$ सेमी असेल, तर 11.6 सेमी लांबीच्या रेषाखंडाचे 3 समान भाग करून AB रेषाखंड काढता येईल.

उदा. (1) मधील रचनेत दिलेल्या व काढावयाच्या त्रिकोणांत सामाईक शिरोबिंदू नव्हता. एक शिरोबिंदू सामाईक असेल तर त्रिकोण रचना पुढील उदाहरणात दाखवल्याप्रमाणे करणे सोयीचे असते.

उदा.(2) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.

Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ असा काढा

की AB : A′B = 5:3



आकृती 4.3

कच्ची आकृती

विश्लेषण : B, A, A′ हे तसेच B, C, C′ हे एकरेषीय घेऊ.

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC' \;\therefore\; \angle ABC = \angle A'BC'$

$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ Δ ABC च्या बाजू Δ A′BC′ च्या संगत बाजूंपेक्षा मोठ्या असणार.

$\therefore$ रेख BC चे 5 समान भाग केले तर त्यांतील तीन भागांएवढी रेख BC′ ची लांबी असेल.

Δ ABC काढून रेख BC वरील बिंदू B पासून तीन भागांएवढ्या अंतरावरील बिंदू हा बिंदू C′ असला पाहिजे. बिंदू C′ मधून रेख AC ला समांतर काढलेली रेषा, रेख BA ला ज्या बिंदूत छेदेल तो बिंदू A′ असेल.

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5} \text{ म्हणजेच, } \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3}$$ .... व्यस्त क्रिया करून

रचनेच्या पायऱ्याः

(1) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.

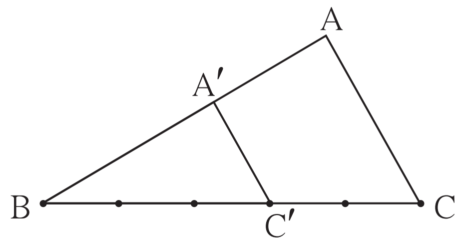
(2) रेख BC चे पाच समान भाग करा.

(3) बिंदू B पुढील तिसऱ्या बिंदूस C′ नाव द्या.

$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

(4) आता C′ मधून रेख CA ला समांतर रेषा काढा. ती रेख AB ला जेथे छेदते, त्या बिंदूला A′ नाव द्या.

(5) Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ हा इष्ट त्रिकोण आहे.

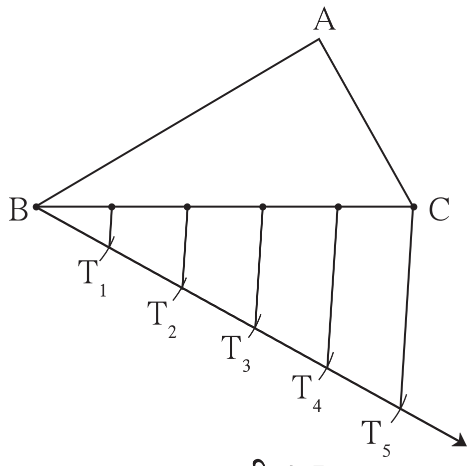


आकृती 4.4

टीप : BC चे पाच समान भाग करताना, रेषा BC च्या ज्या बाजूला A आहे त्याच्या विरुद्ध बाजूला B मधून एक किरण काढून असे भाग करणे सोयीचे असते.

त्या किरणावर $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ असे समान भाग घ्या.

T_5C जोडा व T_1, T_2, T_3, T_4, मधून रेख T_5C ला समांतर रेषा काढा.

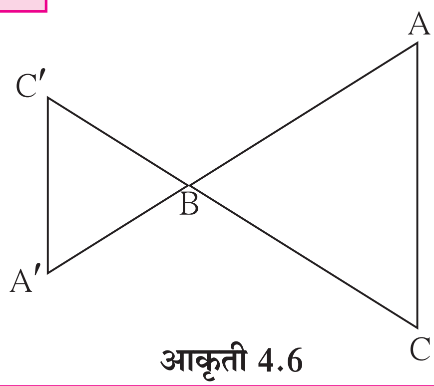


आकृती 4.5

विचार करूया.

समरूप त्रिकोण काढण्यासाठी सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणेही Δ A′BC′ काढता येईल.

या आकृतीप्रमाणे Δ A′BC′ काढावयाचा असेल तर रचनेच्या पायऱ्यांत कोणता बदल करावा लागेल?



आकृती 4.6

उदा.(3) Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ असा काढा, की AB : A′B = 5:7

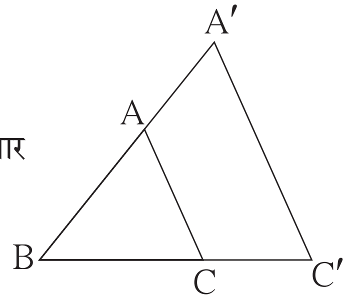
विश्लेषण : बिंदू B, A, A′ तसेच बिंदू B, C, C′ एकरेषीय घेऊ.

Δ ABC ~ Δ A′BC′ आणि AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABC च्या बाजू Δ A′BC′ च्या संगत बाजूंपेक्षा लहान असणार

तसेच $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

या बाबी विचारात घेऊन कच्ची आकृती काढू.



आकृती 4.7

कच्ची आकृती

आता $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ रेख BC चे 5 समान भाग केले तर त्यांतील एका भागाच्या 7 पट रेख BC′ ची लांबी असेल.

$\therefore$ Δ ABC काढून रेख BC चे पाच समान भाग करू. बिंदू C′ हा किरण BC वर B पासून सात भाग अंतरावर असेल.

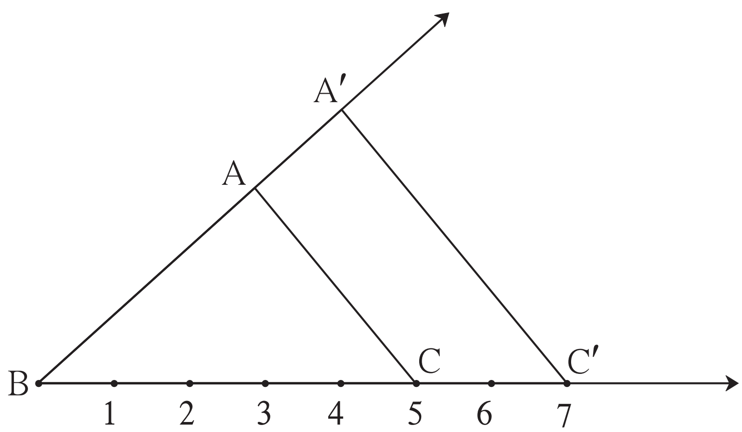
प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार, बिंदू C′ मधून बाजू AC ला समांतर रेषा काढली तर ती वाढवलेल्या किरण BA ला ज्या बिंदूत छेदते, तो A′ हा बिंदू असेल. रेख A′C′ काढून Δ A′BC′ हा अपेक्षित त्रिकोण मिळेल.

रचनेच्या पायऱ्या :

(1) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.

(2) रेख BC चे 5 समान भाग करा. किरण BC वर बिंदू C′ असा घ्या, की रेख BC′ ची लांबी रेख BC च्या एका भागाच्या सात पट असेल.

(3) रेख AC ला C′ मधून समांतर रेषा काढा. ती रेषा किरण BA ला जेथे छेदते, त्या बिंदूला A′ हे नाव द्या. Δ A′BC′ हा Δ ABC शी समरूप असलेला इष्ट त्रिकोण आहे.



आकृती 4.8

सरावसंच 4.1

1. Δ ABC ~ Δ LMN , Δ ABC असा काढा, की AB = 5.5 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 4.5 सेमी आणि $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ तर Δ ABC व Δ LMN काढा.

2. Δ PQR ~ Δ LTR, Δ PQR मध्ये PQ = 4.2 सेमी, QR = 5.4 सेमी, PR = 4.8 सेमी आणि $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ तर Δ PQR व Δ LTR काढा.

3. Δ RST ~ Δ XYZ, Δ RST मध्ये RS = 4.5 सेमी, $\angle$ RST = 40°, ST = 5.7 सेमी आणि $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ तर Δ RST व Δ XYZ काढा.

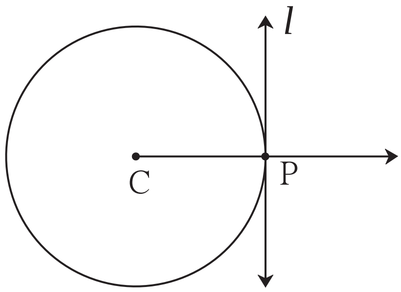
4. Δ AMT ~ Δ AHE, Δ AMT मध्ये AM = 6.3 सेमी, $\angle$ TAM = 50°, AT = 5.6 सेमी आणि $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ तर Δ AHE काढा.

जाणून घेऊया.

दिलेल्या वर्तुळाला त्यावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे

(i) वर्तुळ केंद्राचा उपयोग करून.

विश्लेषण :



आकृती 4.9

समजा केंद्र C असलेल्या वर्तुळावरील P बिंदूतून जाणारी, रेषा l ही स्पर्शिका काढायची आहे.

त्रिज्येच्या बाह्यटोकाशी काढलेली लंबरेषा ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते या गुणधर्माचा उपयोग करू. समजा त्रिज्या CP काढली तर रेख CP $\perp$ रेषा l म्हणजे त्रिज्या CP ला बिंदू P मधून जाणारी लंब रेषा काढली की, ती अपेक्षित स्पर्शिका होईल.

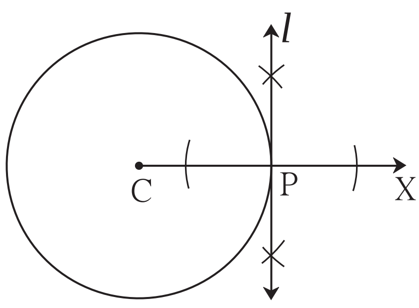
रेषेवरील दिलेल्या बिंदूतून जाणाऱ्या, त्या रेषेला लंब असणाऱ्या रेषेची रचना येथे करावी लागेल.म्हणून सोयीसाठी किरण CP काढून रेषा l ची रचना करू.

रचनेच्या पायऱ्या :

(1) केंद्र C असलेले एक वर्तुळ काढा, त्यावर P हा एक बिंदू घ्या.

(2) किरण CP काढा.

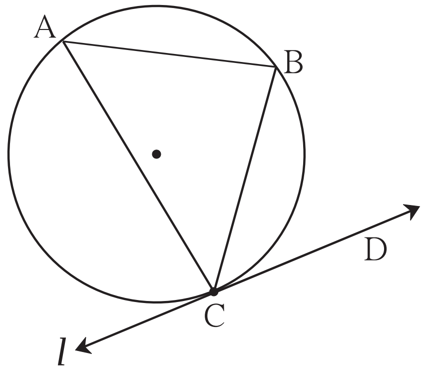
(3) बिंदू P मधून किरण CX ला लंब रेषा l काढा. रेषा l ही, P बिंदूतून जाणारी वर्तुळाची अपेक्षित स्पर्शिका आहे.



आकृती 4.10

ii) वर्तुळ केंद्राचा उपयोग न करता.

उदाहरण : कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. त्यावर C हा कोणताही एक बिंदू घ्या. वर्तुळ केंद्राचा उपयोग न करता, बिंदू C मधून जाणारी त्या वर्तुळाची स्पर्शिका काढा.



आकृती 4.11

विश्लेषण:

समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेषा l ही बिंदू C मधून जाणारी स्पर्शिका आहे. रेख CB ही जीवा आणि $\angle$ CAB हा अंतर्लिखित कोन काढला. स्पर्शिका-छेदिका कोनाच्या प्रमेयानुसार $\angle CAB \cong \angle BCD$.

स्पर्शिका छेदिका कोनाच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

जर $\angle CAB \cong \angle BCD$, तर रेषा l ही वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

म्हणून रेख CB ही वर्तुळाची जीवा आणि $\angle CAB$ हा अंतर्लिखित कोन काढू. $\angle BCD$ या कोनाची रचना अशी करू ,की $\angle BCD \cong \angle BAC$.

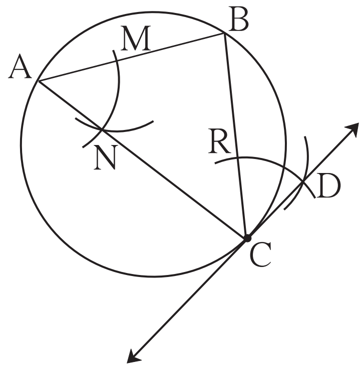
रेषा CD ही दिलेल्या वर्तुळाच्या बिंदू C मधून जाणारी त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असेल.

रचनेच्या पायऱ्या:

(1) एक वर्तुळ काढा. वर्तुळावर C हा कोणताही एक बिंदू घ्या.

(2) जीवा CB आणि अंतर्लिखित $\angle CAB$ काढा.

(3) कंपासमध्ये सोयिस्कर त्रिज्या घेऊन आणि बिंदू A केंद्र घेऊन $\angle BAC$ च्या भुजांना बिंदू M व बिंदू N मध्ये छेदणारा कंस काढा.



आकृती 4.12

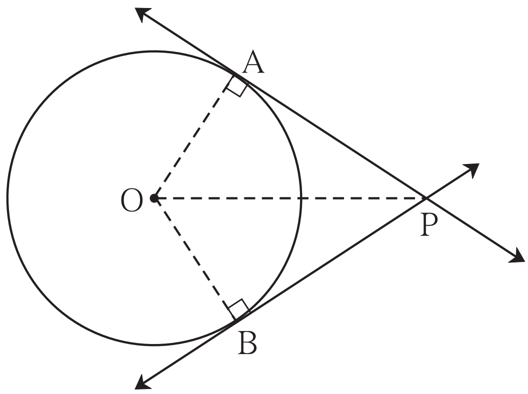
(4) तीच त्रिज्या आणि केंद्र C घेऊन, जीवा CB ला छेदणारा कंस काढा. छेदनबिंदूला R नाव द्या.

(5) कंपासमध्ये MN एवढी त्रिज्या घ्या. केंद्र R घेऊन आधी काढलेल्या कंसाला छेदणारा आणखी एक कंस काढा. त्या छेदनबिंदूला D नाव द्या. रेषा CD काढा.रेषा CD ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

(वरील आकृतीत $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ BCD याचे कारण ध्यानात घ्या. रेषाखंड MN व रेषाखंड RD काढल्यास बाबाबा कसोटीनुसार Δ MAN $\cong$ Δ RCD. $\therefore$ $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ BCD)

दिलेल्या वर्तुळाला त्याबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.

विश्लेषण :



आकृती 4.13

समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात बिंदू P आहे.बिंदू P मधून काढलेल्या स्पर्शिका या वर्तुळाला बिंदू A आणि बिंदू B मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू A आणि बिंदू B यांची वर्तुळावरील स्थाने निश्चित करता आली, तर स्पर्शिका PA आणि PB काढता येतील. कारण त्रिज्या OA आणि OB काढल्या तर

त्रिज्या OA $\perp$ रेषा PA आणि त्रिज्या OB $\perp$ रेषा PB.

Δ OAP व Δ OBP हे काटकोन त्रिकोण असून, OP त्या दोन्हींचा कर्ण आहे. रेख OP व्यास असणारे वर्तुळ काढले तर ते केंद्र O असणाऱ्या वर्तुळाला ज्या बिंदूंत छेदेल, ते A आणि B असतील. कारण अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो.

रचनेच्या पायऱ्या:

(1) केंद्र O असलेले कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा.

(2) वर्तुळाच्या बाह्यभागात P हा एक बिंदू घ्या.

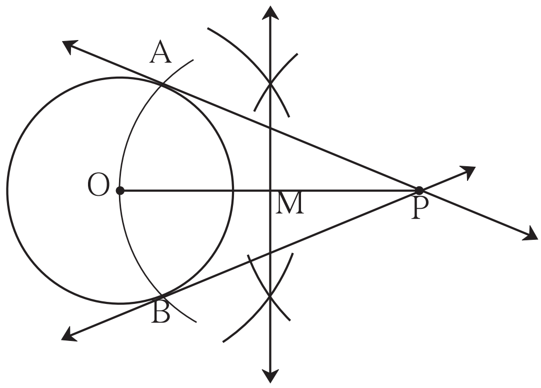
(3) रेख OP काढा. रेख OP चा लंबदुभाजक काढून मध्यबिंदू M मिळवा.

(4) केंद्र M व त्रिज्या OM घेऊन वर्तुळ कंस काढा.

(5) हा वर्तुळकंस दिलेल्या वर्तुळाला A आणि B बिंदूत छेदतो.

(6) रेषा PA व रेषा PB काढा.

रेषा PA व रेषा PB ह्या वर्तुळाच्या अपेक्षित स्पर्शिका आहेत.



आकृती 4.14

सरावसंच 4.2

1. केंद्र P व त्रिज्या 3.2 सेमी असलेल्या वर्तुळाला त्यावरील M बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

2. 2.7 सेमी त्रिज्या असलेले वर्तुळ काढा. या वर्तुळाला त्यावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

3. 3.6 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. या वर्तुळाला त्यावरील कोणत्याही बिंदूतून वर्तुळकेंद्र विचारात न घेता स्पर्शिका काढा.

4. 3.3 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा.त्यामध्ये 6.6 सेमी लांबीची जीवा PQ काढा. बिंदू P व बिंदू Q मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा. स्पर्शिकांबाबत तुमचे निरीक्षण नोंदवा.

5. 3.4 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा.त्यामध्ये 5.7 सेमी लांबीची जीवा MN काढा. बिंदू M व बिंदू N मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

6. P केंद्र व 3.4 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 5.5 सेमी अंतरावर Q बिंदू घ्या. Q बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

7. 4.1 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 7.3 सेमी अंतरावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. योग्य पर्याय निवडा :

(1) वर्तुळावरील दिलेल्या बिंदूतून वर्तुळाला काढता येणाऱ्या स्पर्शिकांची संख्या .... असते.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून वर्तुळाला जास्तीत जास्त .... स्पर्शिका काढता येतात.

(A) 2 (B) 1 (C) एक आणि एकच (D) 0

(3) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ तर ....

(A) Δ ABC मोठा असेल. (B) Δ PQR मोठा असेल.

(C) दोन्ही त्रिकोण समान असतील. (D) निश्चित सांगता येणार नाही.

2. केंद्र O असलेले 3.5 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 5.7 सेमी अंतरावर बिंदू P घ्या. P बिंदूमधून वर्तुळाची स्पर्शिका काढा.

3. कोणतेही एक वर्तुळ काढा. त्यावर A हा बिंदू घेऊन त्यामधून वर्तुळाची स्पर्शिका वर्तुळकेंद्राचा उपयोग न करता काढा.

4. 6.4 सेमी व्यासाचे वर्तुळ काढा. वर्तुळकेंद्रापासून व्यासाएवढ्या अंतरावर बिंदू R घ्या. या बिंदूतून वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढा.

5. केंद्र P असलेले वर्तुळ काढा. 100° मापाचा एक लघुकंस AB काढा. बिंदू A व बिंदू B मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

6. केंद्र E असलेले 3.4 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वर्तुळावर F बिंदू घ्या. बिंदू A असा घ्या, कि E-F-A आणि FA = 4.1 सेमी. बिंदू A मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.

7. जर $\Delta ABC \sim \Delta LBN$, Δ ABC मध्ये AB = 5.1 सेमी, $\angle B = 40^\circ$, BC = 4.8 सेमी, $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ तर Δ ABC व Δ LBN काढा.

8. Δ PYQ असा काढा की, PY = 6.3 सेमी, YQ = 7.2 सेमी, PQ = 5.8 सेमी. Δ XYZ हा Δ PYQ शी समरूप त्रिकोण असा काढा की, $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$.

AKFIRJ