

2

पायथागोरसचे प्रमेय



चला, शिकूया.

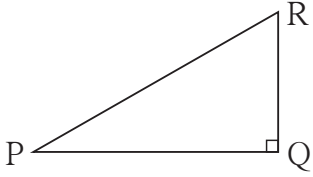
- पायथागोरसचे त्रिकुट
- भूमितीमध्याचे प्रमेय
- पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन
- समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण
- पायथागोरसचे प्रमेय
- अपोलोनियसचे प्रमेय



जरा आठवूया.

पायथागोरसचे प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.



आकृती 2.1

 ΔPQR मध्ये $\angle PQR = 90^\circ$

$$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$$

हेच आपण $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ असे लिहू.

ΔPQR च्या PQ , QR व PR या बाजूंच्या लांबी अनुक्रमे r , p आणि q या अक्षरांनी दाखविण्याचाही संकेत आहे. त्यानुसार, आकृती 2.1 च्या संदर्भात पायथागोरसचे प्रमेय $q^2 = p^2 + r^2$ असेही लिहिता येईल.

पायथागोरसचे त्रिकुट :

नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर एका संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर त्याला पायथागोरसचे त्रिकुट म्हणतात.

उदाहरणार्थ : (11, 60, 61) या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये,

$$11^2 = 121, \quad 60^2 = 3600, \quad 61^2 = 3721 \quad \text{आणि} \quad 121 + 3600 = 3721$$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका आहे.

∴ 11, 60, 61 हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

तसेच (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) ही देखील पायथागोरसची त्रिकुटे आहेत, हे पडताळा.

पायथागोरसच्या त्रिकुटांतील संख्या कोणत्याही क्रमाने लिहिता येतात.



जाणून घेऊया.

आता आपण पायथागोरसच्या प्रमेयाची सिद्धता समरूप त्रिकोणांच्या आधारे देणार आहोत.

ही सिद्धता देण्यासाठी आवश्यक असणारे काटकोन त्रिकोणाचे समरूपतेसंबंधीचे गुणधर्म अभ्यासू.

समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण (Similarity and right angled triangle)

प्रमेय : काटकोन त्रिकोणात कर्णावर टाकलेल्या शिरोलंबामुळे जे त्रिकोण तयार होतात ते मूळ काटकोन त्रिकोणाशी व परस्परांशी समरूप असतात.

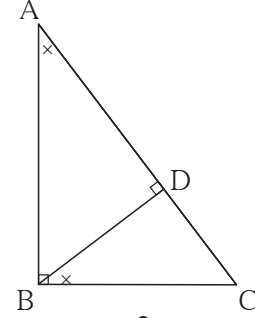
पक्ष : ΔABC मध्ये $\angle ABC = 90^\circ$,

रेख $BD \perp$ रेख AC , $A-D-C$

साध्य : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$



आकृती 2.5

सिद्धता : ΔADB आणि ΔABC मध्ये

$\angle DAB \cong \angle BAC$... (सामाईक कोन)

$\angle ADB \cong \angle ABC$... (90° कोन)

$\Delta ADB \sim \Delta ABC$... (को को कसोटी) ... (I)

तसेच, ΔBDC आणि ΔABC मध्ये

$\angle BCD \cong \angle ACB$... (सामाईक कोन)

$\angle BDC \cong \angle ABC$... (90° कोन)

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$... (को को कसोटी) .. (II)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC$ विधान (I) व (II) वरून ... (III)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC \sim \Delta ABC$ विधान (I), (II) व (III) वरून..... संक्रामकता

भूमितीमध्याचे प्रमेय (Theorem of geometric mean)

काटकोन त्रिकोणात, कर्णावर काढलेला शिरोलंब, त्या शिरोलंबामुळे होणाऱ्या कर्णाच्या दोन भागांचा भूमितीमध्य असतो.

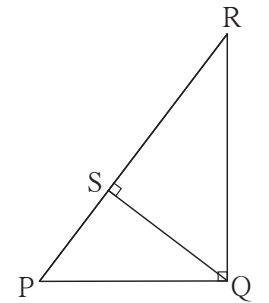
सिद्धता : काटकोन त्रिकोण PQR मध्ये रेख $QS \perp$ कर्ण PR

$\Delta QSR \sim \Delta PSQ$ (काटकोन त्रिकोणांची समरूपता)

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$



आकृती 2.6

\therefore शिरोलंब QS हा रेख PS आणि रेख SR यांचा 'भूमितीमध्य' आहे.

पायथागोरसचे प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.

पक्ष : ΔABC मध्ये, $\angle ABC = 90^\circ$

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदू B मधून बाजू AC वर रेषा BD
लंब काढला. A-D-C

सिद्धता : काटकोन ΔABC मध्ये रेषा $BD \perp$ कर्ण AC (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ (काटकोन त्रिकोणाची समरूपता) आकृती 2.7

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB} \text{ - संगतभुजा}$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

$$AB^2 = AD \times AC \text{ (I)}$$

(I) व (II) यांची बेरीज करून

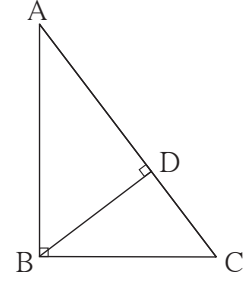
$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$= AC (AD + DC)$$

$$= AC \times AC \text{ (A-D-C)}$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$



आकृती 2.7

तसेच, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC} \text{ - संगतभुजा}$$

$$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$$

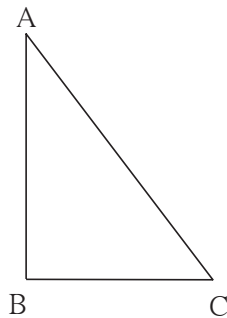
$$BC^2 = DC \times AC \text{ (II)}$$

पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of Pythagoras' theorem)

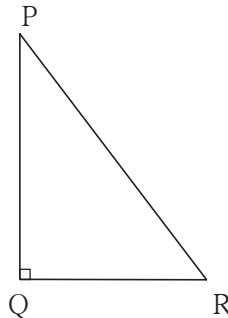
एखाद्या त्रिकोणातील एका बाजूचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल, तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

पक्ष : ΔABC मध्ये, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90^\circ$



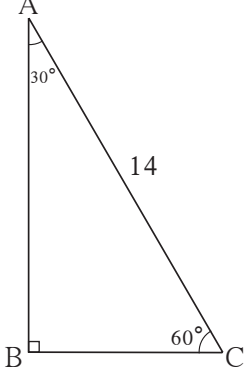
आकृती 2.8



आकृती 2.9

उदा. (1) आकृती 2.11 पाहा. ΔABC मध्ये $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 14$ तर AB व BC काढा.

उकल :



आकृती 2.11

ΔABC मध्ये,

$$\angle B = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \therefore \angle C = 60^\circ$$

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ च्या प्रमेयानुसार,

$$BC = \frac{1}{2} \times AC$$

$$BC = \frac{1}{2} \times 14$$

$$BC = 7$$

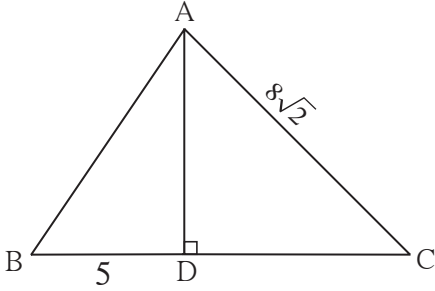
$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$$

$$AB = 7\sqrt{3}$$

उदा. (2) आकृती 2.12 पाहा. ΔABC मध्ये रेख $AD \perp$ रेख BC , $\angle C = 45^\circ$, $BD = 5$ आणि $AC = 8\sqrt{2}$, तर AD आणि BC काढा.

उकल :



आकृती 2.12

ΔADC मध्ये,

$$\angle ADC = 90^\circ, \angle C = 45^\circ, \therefore \angle DAC = 45^\circ$$

$$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} \dots (\text{45}^\circ - \text{45}^\circ - \text{90}^\circ \text{ च्या प्रमेयानुसार})$$

$$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$$

$$BC = BD + DC$$

$$= 5 + 8$$

$$= 13$$

उदा. (3) आकृती 2.13 मध्ये $\angle PQR = 90^\circ$, रेख $QN \perp$ रेख PR , $PN = 9$, $NR = 16$ तर QN काढा.

उकल : ΔPQR मध्ये, रेख $QN \perp$ रेख PR

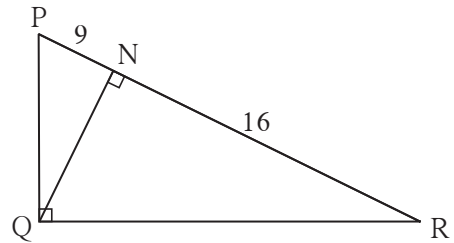
$$\therefore QN^2 = PN \times NR \dots (\text{भूमितीमध्याचे प्रमेय})$$

$$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$$

$$= \sqrt{9 \times 16}$$

$$= 3 \times 4$$

$$= 12$$



आकृती 2.13

तसेच ΔADC मध्ये,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore p^2 = b^2 - x^2 \quad \dots\dots\dots (II)$$

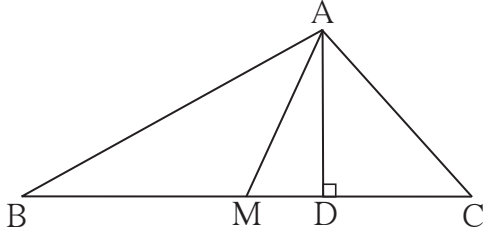
\therefore (I) मध्ये (II) मधील p^2 ची किंमत घालून,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 \\ &= a^2 + 2ax + b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

अपोलोनियसचे प्रमेय (Appollonius' Theorem)

ΔABC मध्ये, बिंदू M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू असेल, तर $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



आकृती 2.25

पक्ष : ΔABC मध्ये M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

रचना : रेख $AD \perp$ रेख BC काढला.

सिद्धता : जर रेख AM हा रेख BC ला लंब नसेल, तर $\angle AMB$ आणि $\angle AMC$ यांपैकी एक विशालकोन आणि दुसरा लघुकोन असतो.

आकृतीमध्ये $\angle AMB$ विशालकोन आणि $\angle AMC$ हा लघुकोन आहे.

वरील उदाहरण (1) व उदाहरण (2) वरून,

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD \quad \dots\dots (I)$$

$$\text{आणि } AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$$

$$\therefore AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD \quad (\because BM = MC) \quad \dots\dots\dots (II)$$

\therefore (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

जर रेख $AM \perp$ बाजू BC तर या प्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.

या उदाहरणावरून त्रिकोणाच्या बाजू आणि मध्यगा यांचा परस्परसंबंध समजतो.

यालाच 'अपोलोनियसचे प्रमेय' म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) ΔPQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे. $PM = 9$ आणि $PQ^2 + PR^2 = 290$, तर QR काढा.

उकल : ΔPQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे.

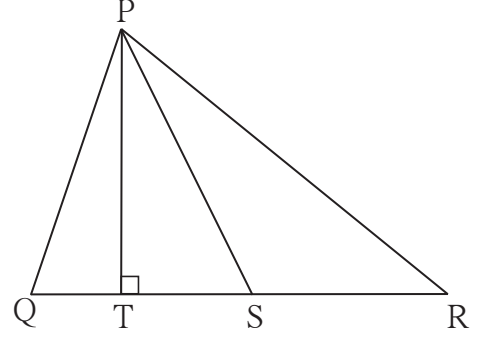
M हा रेख QR चा मध्यबिंदू आहे.

1. ΔPQR मध्ये, बिंदू S हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे, जर $PQ = 11$, $PR = 17$, $PS = 13$ असेल तर QR ची लांबी काढा.
2. ΔABC मध्ये, $AB = 10$, $AC = 7$, $BC = 9$ तर बिंदू C मधून बाजू AB वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी किती ?

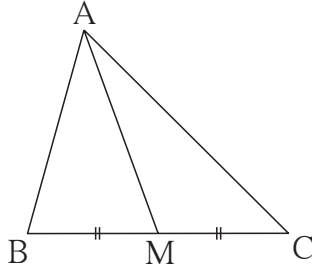
3. आकृती 2.28 मध्ये रेख PS ही ΔPQR ची मध्यगा आहे आणि $PT \perp QR$ तर सिद्ध करा,

$$(1) PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$

$$(2) PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$



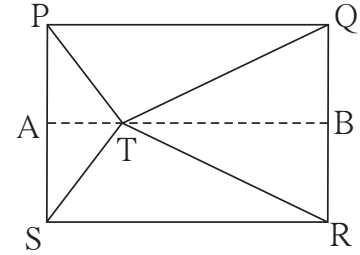
आकृती 2.28



आकृती 2.29

4. आकृती 2.29 मध्ये, ΔABC च्या बाजू BC चा बिंदू M हा मध्यबिंदू आहे. जर $AB^2 + AC^2 = 290$ सेमी, $AM = 8$ सेमी, तर BC काढा.

- 5*. आकृती 2.30 मध्ये दाखविल्यानुसार T हा बिंदू आयत PQRS च्या अंतर्भागात आहे, तर सिद्ध करा, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे A-T-B असा रेख $AB \parallel$ बाजू SR काढा.)



आकृती 2.30

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.
 - (1) खालीलपैकी कोणते पायथागोरसचे त्रिकुट आहे ?
(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)
 - (2) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या वर्गाची बेरीज 169 असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती ?
(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

- (3) खालीलपैकी कोणत्या तारखेतील संख्या हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे ?
 (A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15
- (4) बाजूंच्या लांबी a , b , c असलेल्या त्रिकोणामध्ये जर $a^2 + b^2 = c^2$ असेल तर तो कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण असेल ?
 (A) विशालकोन त्रिकोण (B) लघुकोन त्रिकोण (C) काटकोन त्रिकोण (D) समभुज त्रिकोण
- (5) एका चौरसाचा कर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी असल्यास त्याची परिमिती असेल.
 (A) 10 सेमी (B) $40\sqrt{2}$ सेमी (C) 20 सेमी (D) 40 सेमी
- (6) एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील शिरोलंबामुळे कर्णाचे 4 सेमी व 9 सेमी लांबीचे दोन भाग होतात, तर त्या शिरोलंबाची लांबी किती ?
 (A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी
- (7) काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 24 सेमी व 18 सेमी असतील तर त्याच्या कर्णाची लांबी असेल.
 (A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी
- (8) ΔABC मध्ये, $AB = 6\sqrt{3}$ सेमी, $AC = 12$ सेमी आणि $BC = 6$ सेमी तर $\angle A$ चे माप किती ?
 (A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. खालील उदाहरणे सोडवा.

- (1) एका समभुज त्रिकोणाची बाजू $2a$ आहे, तर त्याची उंची काढा.
- (2) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी बाजू असलेला त्रिकोण काटकोन त्रिकोण होईल का ? सकारण लिहा.
- (3) आयताच्या बाजू 11 सेमी व 60 सेमी असतील, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.
- (4) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी काढा.
- (5) समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाची बाजू x आहे, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.
- (6) ΔPQR मध्ये; $PQ = \sqrt{8}$, $QR = \sqrt{5}$, $PR = \sqrt{3}$; तर ΔPQR हा काटकोन त्रिकोण आहे का ? असल्यास त्याचा कोणता कोन काटकोन आहे ?

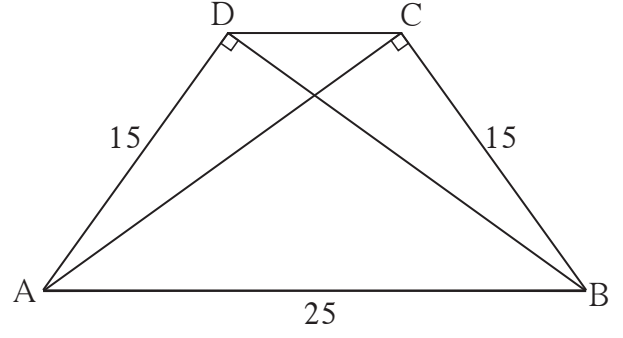
3. ΔRST मध्ये, $\angle S = 90^\circ$, $\angle T = 30^\circ$, $RT = 12$ सेमी तर RS व ST काढा.

4. आयताचे क्षेत्रफळ 192 चौसेमी असून त्याची लांबी 16 सेमी आहे, तर आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

5*. एका समभुज त्रिकोणाची उंची $\sqrt{3}$ सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

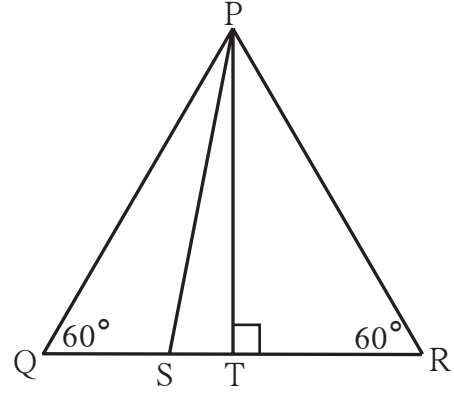
6. ΔABC मध्ये रेख AP ही मध्यगा आहे. जर $BC = 18$, $AB^2 + AC^2 = 260$ तर AP काढा.

15. समलंब चौकोन ABCD मध्ये,
रेख AB \parallel रेख DC
रेख BD \perp रेख AD,
रेख AC \perp रेख BC,
जर AD = 15, BC = 15 आणि AB = 25
असेल तर A(\square ABCD) किती ?



आकृती 2.34

- 16*. आकृतीमध्ये $\triangle PQR$ हा समभुज त्रिकोण असून
बिंदू S हा रेख QR वर अशा प्रकारे आहे की,
 $QS = \frac{1}{3} QR$ तर सिद्ध करा; $9 PS^2 = 7 PQ^2$



आकृती 2.35

- 17*. रेख PM ही $\triangle PQR$ ची मध्यगा आहे. जर PQ = 40, PR = 42 आणि PM = 29, तर QR काढा.
18. रेख AM ही $\triangle ABC$ ची मध्यगा आहे. जर AB = 22, AC = 34, BC = 24, तर बाजू AM ची लांबी काढा.



ICT Tools or Links

इंटरनेटवरून 'Story on the life of Pythagoras' ची माहिती मिळवा. Slide show तयार करा.

