1 समरूपता

चला, शिकूया.

- दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर
- प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय
- प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास
- त्रिकोणाच्या कोन दुभाजकाचा गुणधर्म
- तीन समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे झालेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर
- त्रिकोणाच्या समरूपतेच्या कसोट्या
- समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणधर्म

जरा आठवूया.

आपण गुणोत्तर व प्रमाण यांचा अभ्यास केला आहे. a आणि b या दोन संख्यांचे गुणोत्तर $\frac{m}{n}$ आहे, हेच विधान a आणि b या दोन संख्या $m:n$ या प्रमाणात आहेत असेही लिहितात.

या संकल्पनेसाठी आपण सामान्यपणे धन वास्तव संख्यांचा विचार करतो. आपल्याला हे माहीत आहे की रेषाखंडांची लांबी आणि एखाद्या आकृतीचे क्षेत्रफळ या धन वास्तव संख्या असतात .

आपल्याला त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र माहीत आहे.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ पाया $\times$ उंची

जाणून घेऊया.

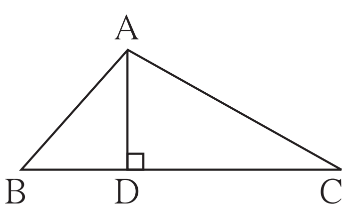
दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर (Ratio of areas of two triangles)

कोणत्याही दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढू.

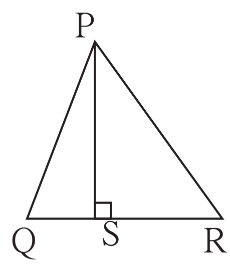
उदाहरण. Δ ABC चा BC हा पाया आहे व AD ही उंची आहे.

Δ PQR चा QR हा पाया आहे व PS ही उंची आहे.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



आकृती 1.1



आकृती 1.2

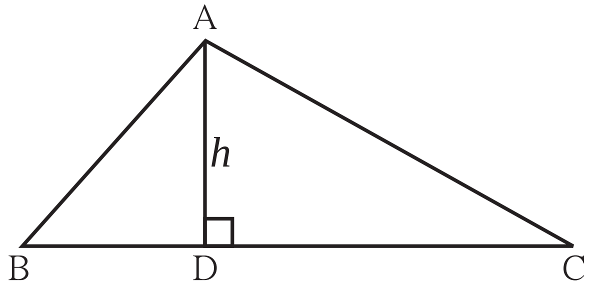
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

यावरून, दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

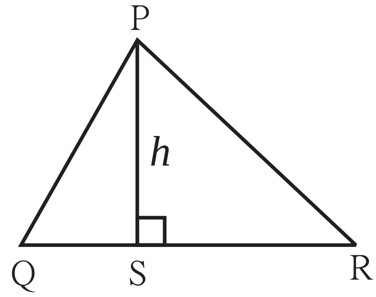
एका त्रिकोणाचा पाया b_1 व उंची h_1 आणि दुसऱ्या त्रिकोणाचा पाया b_2 व उंची h_2 असेल तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर = $\frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

या दोन त्रिकोणांच्या संबधात काही अटी घालून पाहू.

अट 1 : दोन्ही त्रिकोणांची उंची समान असेल, तर –



आकृती 1.3



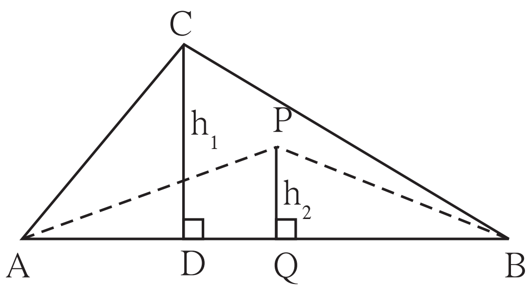
आकृती 1.4

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

गुणधर्म : समान उंची असलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.

अट 2 : दोन्ही त्रिकोणांचा पाया समान असेल तर –



आकृती 1.5

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

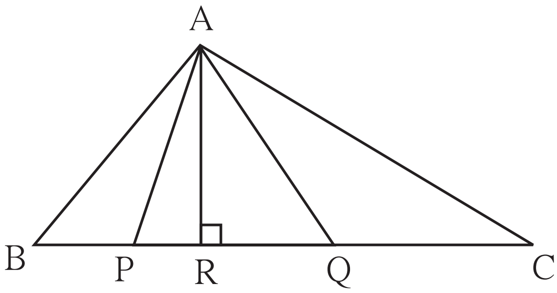
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

गुणधर्म : समान लांबीच्या पायांच्या दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचीच्या प्रमाणात असतात.

कृती :

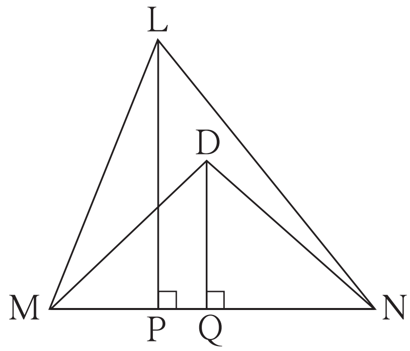
खालील रिकाम्या चौकटी योग्य प्रकारे भरा.

(i)



आकृती 1.6

(ii)



आकृती 1.7

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

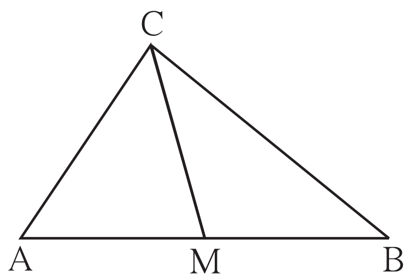
(iii) बिंदू M हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.

रेख CM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे.

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

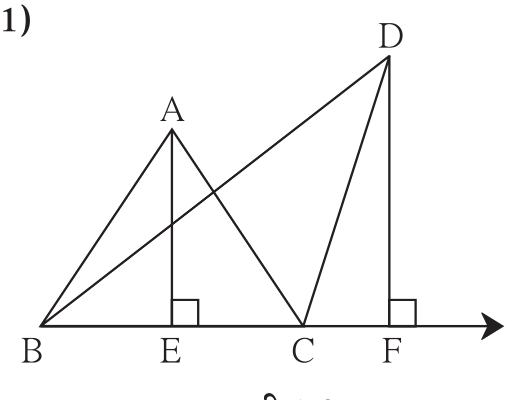
कारण लिहा.



आकृती 1.8

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1)



आकृती 1.9

शेजारील आकृतीत,

रेख AE $\perp$ रेख BC, रेख DF $\perp$ रेषा BC

AE = 4, DF = 6 तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ काढा.

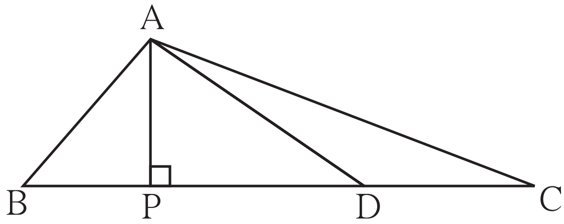
उकल : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$ .... पाया समान, म्हणून क्षेत्रफळे उंचीच्या प्रमाणात

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

उदा. (2) Δ ABC च्या BC बाजूवर D बिंदू असा आहे, की DC = 6, BC = 15.

A(Δ ABD) : A(Δ ABC) आणि A(Δ ABD) : A(Δ ADC) काढा.

उकल : Δ ABD, Δ ADC, Δ ABC या तिन्ही त्रिकोणांचा A हा समाईक शिरोबिंदू आहे व त्यांचा पाया एका रेषेत आहे म्हणून या तीनही त्रिकोणांची उंची समान आहे.



आकृती 1.10

BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

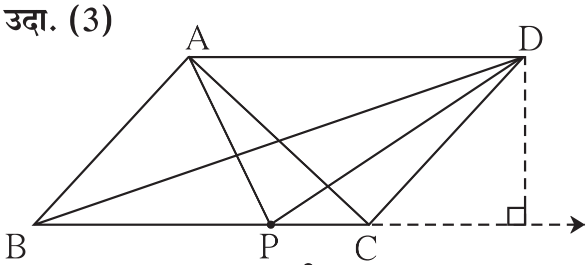
$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$$ .... उंची समान, म्हणून क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$$ .... उंची समान, म्हणून क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

उदा. (3)



आकृती 1.11

□ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. P हा बाजू BC वरील कोणताही एक बिंदू आहे. तर समान क्षेत्रफळांच्या त्रिकोणांच्या दोन जोड्या शोधा.

उकल : □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore$ AD || BC व AB || DC

Δ ABC व Δ BDC विचारात घ्या.

हे त्रिकोण दोन समांतर रेषेमध्ये काढले आहेत. त्यामुळे समांतर रेषांमधील अंतर ही त्या दोन्ही त्रिकोणांची उंची होईल.

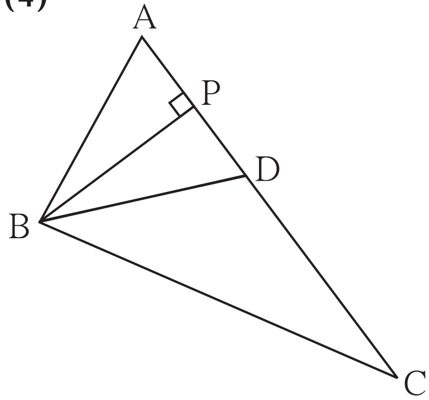
Δ ABC व Δ BDC चा BC हा पाया समान असून उंचीही समान आहे.

म्हणून A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC व Δ ABD चा AB हा पाया समान असून त्यांची उंची सुद्धा समान आहे.

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

उदा. (4)



आकृती 1.12

शेजारील आकृतीत Δ ABC च्या AC या बाजूवर D बिंदू असा आहे की AC = 16, DC = 9, BP $\perp$ AC, तर खालील गुणोत्तरे काढा.

i) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

उकल : Δ ABC च्या बाजू AC वर P व D बिंदू आहेत. म्हणून Δ ABD, Δ BDC, Δ ABC, Δ APB यांचा B हा सामाईक शिरोबिंदू विचारात घेतला तर त्यांच्या AD, DC, AC, AP या बाजू एका रेषेत आहेत. या सर्व त्रिकोणांची उंची समान आहे. म्हणून त्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या पायांच्या प्रमाणात आहेत. AC = 16, DC = 9

$\therefore$ AD = 16 − 9 = 7

$$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(समान उंचीचे त्रिकोण)}$$

$$\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(समान उंचीचे त्रिकोण)}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(समान उंचीचे त्रिकोण)}$$

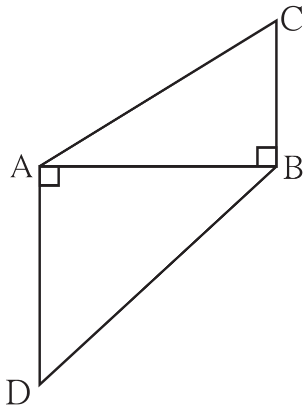
हे लक्षात ठेवूया.

- दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्या त्रिकोणांच्या पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराएवढे असते.
- समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.
- समान पायांच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचींच्या प्रमाणात असतात.

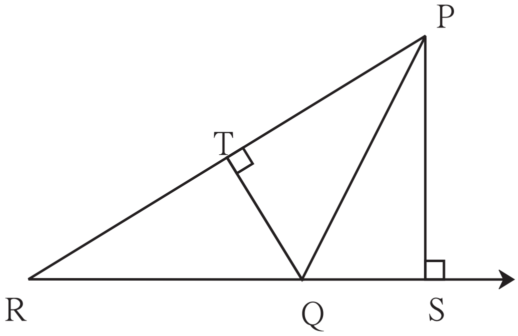
सरावसंच 1.1

1. एका त्रिकोणाचा पाया 9 आणि उंची 5 आहे. दुसऱ्या त्रिकोणाचा पाया 10 आणि उंची 6 आहे, तर त्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

2. दिलेल्या आकृती 1.13 मध्ये $BC \perp AB$, $AD \perp AB$, $BC = 4$, $AD = 8$ तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ काढा.



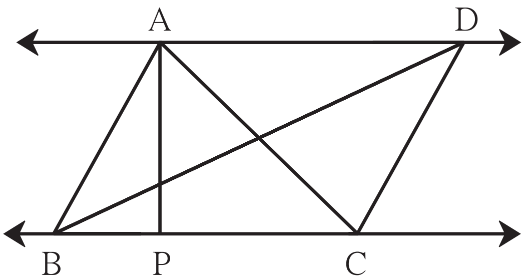
आकृती 1.13



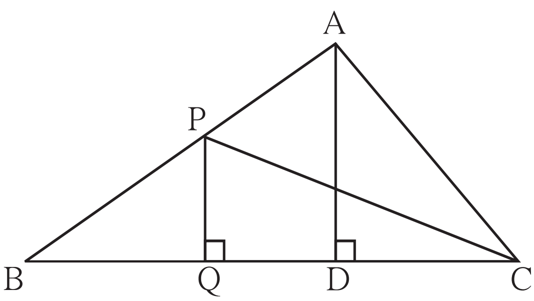
आकृती 1.14

3. शेजारील आकृती 1.14 मध्ये रेख $PS \perp$ रेख RQ रेख $QT \perp$ रेख PR. जर $RQ = 6$, $PS = 6$, $PR = 12$ तर QT काढा.

4. शेजारील आकृतीत $AP \perp BC$, $AD \parallel BC$, तर $A(\Delta ABC) : A(\Delta BCD)$ काढा.



आकृती 1.15



आकृती 1.16

5. शेजारील आकृतीत, $PQ \perp BC$, $AD \perp BC$ तर खालील गुणोत्तरे लिहा.

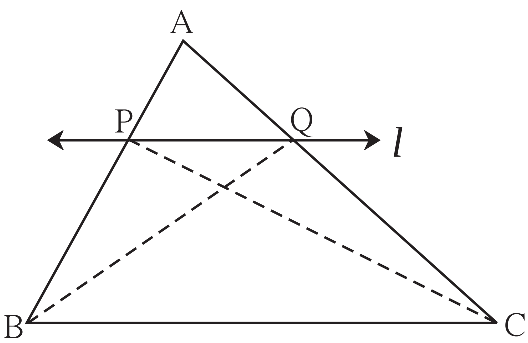
i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

जाणून घेऊया.

प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem)

प्रमेय : **त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर असणारी रेषा त्याच्या उरलेल्या बाजूंना भिन्न बिंदूंत छेदत असेल, तर ती रेषा त्या बाजूंना एकाच प्रमाणात विभागते.**



आकृती 1.17

पक्ष : Δ ABC मध्ये रेषा l || रेख BC
आणि रेषा l ही बाजू AB ला P मध्ये व बाजू AC ला Q मध्ये छेदते.

साध्य : $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$

रचना : रेख PC व रेख BQ काढा.

सिद्धता : Δ APQ व Δ PQB हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत.

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{AP}{PB}$ .... (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात) ..... (I)

तसेच $\dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात) ..... (II)

Δ PQB व Δ PQC यांचा रेख PQ हा समान पाया आहे. रेख PQ || रेख BC
म्हणून Δ PQB व Δ PQC यांची उंची समान आहे.

$\therefore A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) आणि (III)] वरून

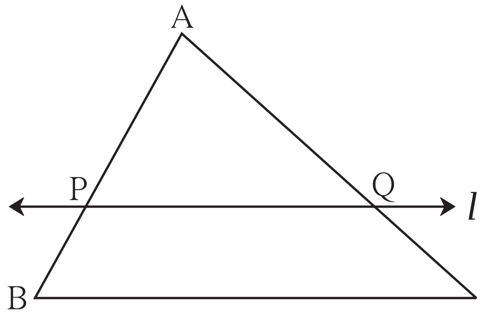
$\therefore \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... [(I) व (II)] वरून

प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास (converse of B.P.T.)

प्रमेय : **एखादी रेषा जर त्रिकोणाच्या दोन भुजांना भिन्न बिंदूंत छेदून एकाच प्रमाणात विभागत असेल, तर ती रेषा उरलेल्या बाजूला समांतर असते.**

आकृती 1.18 मध्ये जर रेषा l ही Δ ABC च्या बाजू AB आणि बाजू AC ला अनुक्रमे P आणि Q बिंदूत छेदते आणि $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ तर रेषा l || रेख BC.

या प्रमेयाची सिद्धता अप्रत्यक्ष पद्धतीने देता येते.



आकृती 1.18

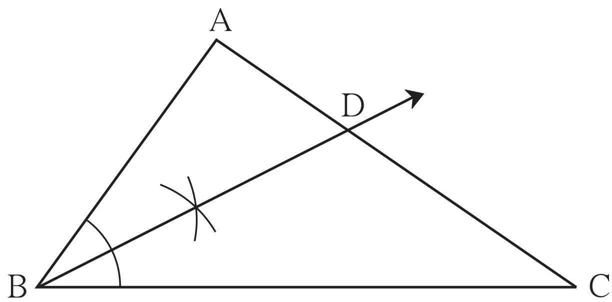
कृती :

- Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.
- त्रिकोणाचा $\angle$ B दुभागा. तो AC ला जेथे छेदतो त्याला D नाव द्या.
- बाजू मोजून लिहा.

  AB = ☐ सेमी BC = ☐ सेमी

  AD = ☐ सेमी DC = ☐ सेमी

- $\frac{AB}{BC}$ व $\frac{AD}{DC}$ ही गुणोत्तरे काढा.
- दोन्ही गुणोत्तरे जवळ जवळ सारखी आहेत, हे अनुभवा.
- याच त्रिकोणाचे इतर कोन दुभागा व वरीलप्रमाणे गुणोत्तरे काढा. ती गुणोत्तरेही समान येतात हे अनुभवा.



आकृती 1.19

जाणून घेऊया.

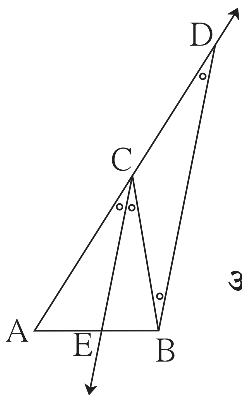
त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचे प्रमेय (Theorem of an angle bisector of a triangle)

प्रमेय : **त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक त्या कोनासमोरील बाजूला उरलेल्या बाजूंच्या लांबींच्या गुणोत्तरात विभागतो.**

पक्ष : Δ ABC च्या $\angle$ C चा दुभाजक रेख AB ला E बिंदूत छेदतो.

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदू B मधून, किरण CE ला समांतर रेषा काढा, ती वाढवलेल्या AC ला बिंदू D मध्ये छेदते.



आकृती 1.20

सिद्धता : किरण CE || किरण BD व रेषा AD ही छेदिका

$\therefore \angle ACE \cong \angle CDB$ .... (संगत कोन)...(I)

आता BC ही छेदिका घेऊन

$\angle ECB \cong \angle CBD$ .... (व्युत्क्रम कोन)...(II)

परंतु $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (पक्ष)...(III)

$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB$ .... [विधान (I), (II) आणि (III) वरून]

Δ CBD मध्ये, बाजू CB $\cong$ बाजू CD .... (एकरूप कोनासमोरील बाजू)

$\therefore$ CB = CD ...(IV)

आता, Δ ABD मध्ये, रेख EC || बाजू BD .... (रचना)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$ .... (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)...(V)

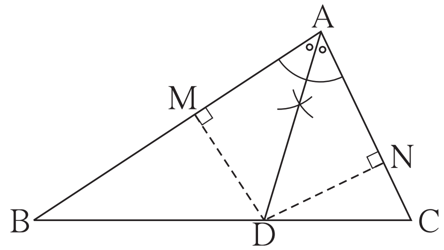
$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$ .... [विधान (IV) आणि (V) वरून]

अधिक माहितीसाठी :

वरील प्रमेयाची सिद्‌धता दुसऱ्या प्रकारे तुम्ही लिहा.

त्यासाठी आकृती 1.21 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे Δ ABC काढा आणि DM $\perp$ AB आणि DN $\perp$ AC काढा.

(1) समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात,

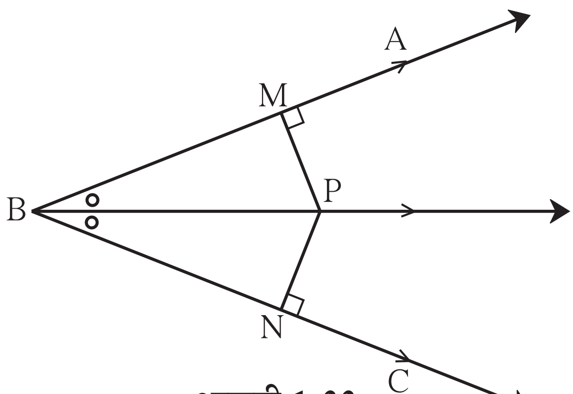


आकृती 1.21

आणि

(2) कोनदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा कोनाच्या भुजांपासून समदूर असतो,

या गुणधर्मांचा उपयोग करा.



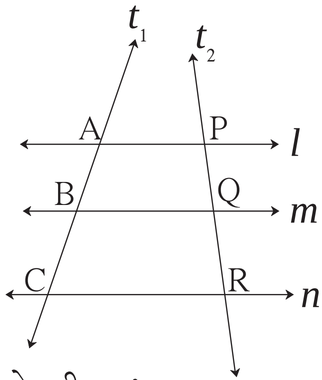
आकृती 1.22

त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABC च्या बाजू BC वर जर बिंदू D असा असेल, की $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, तर किरण AD हा $\angle$ BAC चा दुभाजक असतो.

तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांचा गुणधर्म
(Property of three parallel lines and their transversal)

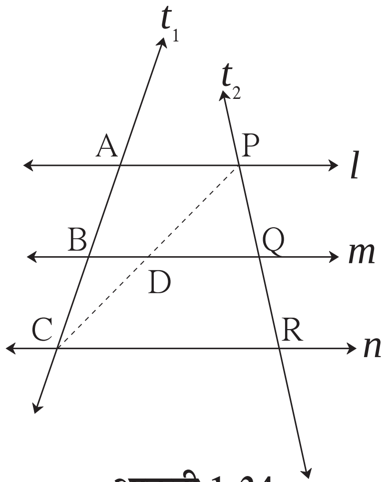
कृती :



आकृती 1.23

- तीन समांतर रेषा काढा.
- त्यांना l, m, n अशी नावे द्या.
- t_1 व t_2 या दोन छेदिका काढा.
- t_1 या छेदिकेवरील आंतरछेद AB व BC आहेत.
- t_2 या छेदिकेवरील आंतरछेद PQ व QR आहेत.
- $\frac{AB}{BC}$ व $\frac{PQ}{QR}$ ही गुणोत्तरे काढा. ती जवळपास सारखी आहेत ही अनुभवा.

प्रमेय : तीन समांतर रेषांनी एका छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर हे त्या रेषांनी दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांच्या गुणोत्तराएवढे असते.



आकृती 1.24

पक्ष : रेषा l || रेषा m || रेषा n

t_1 व t_2 या त्यांच्या छेदिका आहेत.

t_1 ही छेदिका त्या रेषांना अनुक्रमे A, B, C या बिंदूंत छेदते. t_2 ही छेदिका या रेषांना अनुक्रमे P, Q, R या बिंदूंत छेदते.

साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

सिद्धता : रेख PC काढला. हा रेषाखंड रेषा m ला D बिंदूत छेदतो.

Δ ACP मध्ये, BD || AP

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

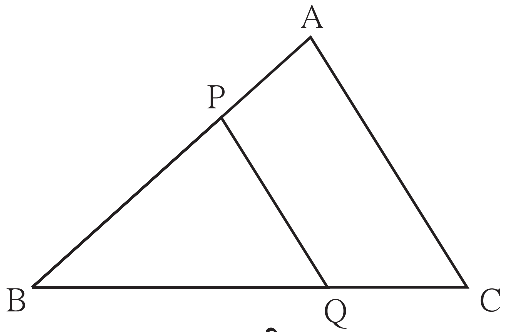
Δ CPR मध्ये DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I) व (II) वरून.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

हे लक्षात ठेवूया.



आकृती 1.25

(1) प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय

Δ ABC मध्ये जर B-P-A ; B-Q-C

आणि रेख PQ || रेख AC असेल

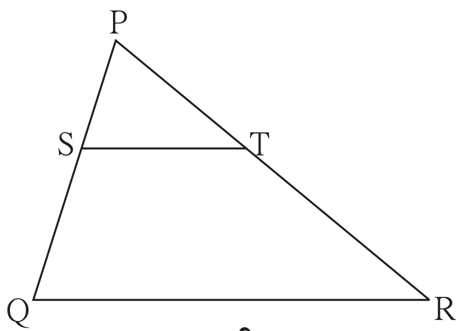
तर $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$

(2) प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास

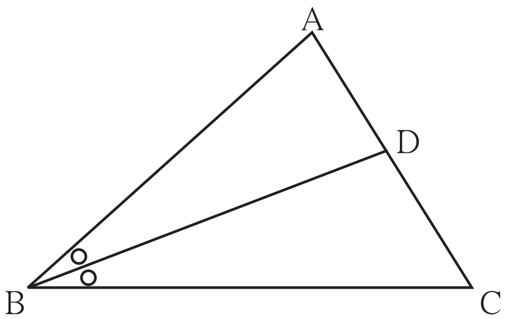
Δ PQR मध्ये जर P-S-Q ; P-T-R

आणि $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

तर रेख ST || रेख QR.



आकृती 1.26



आकृती 1.27

(3) त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचे प्रमेय

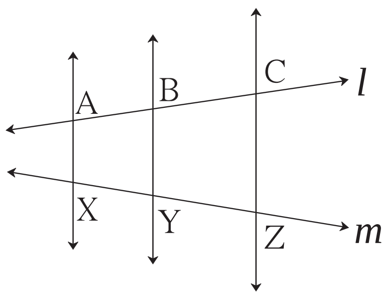
Δ ABC च्या $\angle$ ABC चा BD हा दुभाजक असेल आणि जर A-D-C,

तर $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

(4) तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांचा गुणधर्म

जर रेषा AX || रेषा BY || रेषा CZ आणि रेषा l व रेषा m या छेदिका त्यांना अनुक्रमे A, B, C व X, Y, Z मध्ये छेदत असतील

तर $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$



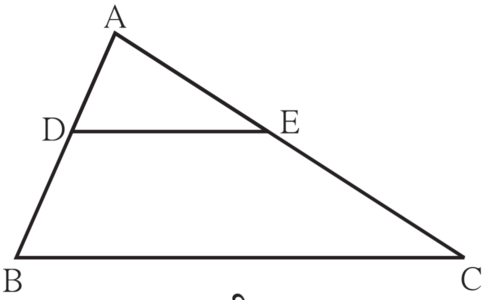
आकृती 1.28

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) Δ ABC मध्ये DE || BC (आकृती 1.29)

जर DB = 5.4 सेमी, AD = 1.8 सेमी

EC = 7.2 सेमी तर AE काढा.



आकृती 1.29

उकल : Δ ABC मध्ये DE || BC

$\therefore \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ..... (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \dfrac{1.8}{5.4} = \dfrac{AE}{7.2}$

$\therefore AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

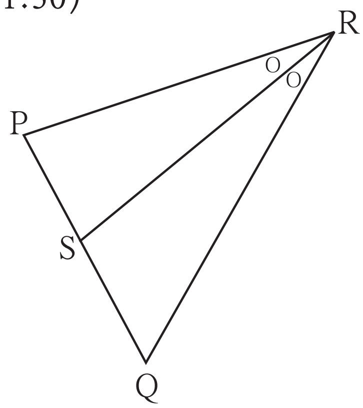
$\therefore AE = \dfrac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

AE = 2.4 सेमी

उदा. (2) Δ PQR मध्ये रेख RS हा $\angle$R चा दुभाजक आहे. (आकृती 1.30)

जर PR = 15, RQ = 20, PS = 12

तर SQ काढा.



आकृती 1.30

उकल : Δ PRQ मध्ये रेख RS हा $\angle$R चा दुभाजक आहे.

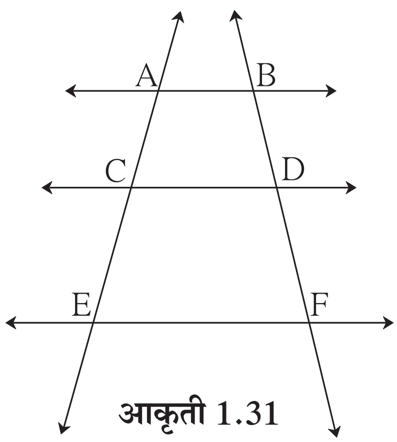
$\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{PS}{SQ}$ . . . . . . (कोनदुभाजकाचा गुणधर्म)

$\dfrac{15}{20} = \dfrac{12}{SQ}$

$SQ = \dfrac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore$ SQ = 16

कृती :



आकृती 1.31

दिलेल्या आकृती 1.31 मध्ये AB || CD || EF

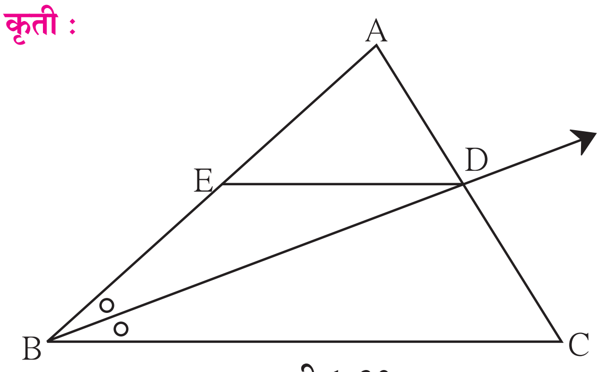
जर AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 तर चौकटी योग्य प्रकारे भरून DF काढा.

उकल : AB || CD || EF

$\dfrac{AC}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{DF}$ . . . . . ($\boxed{}$)

$\dfrac{5.4}{9} = \dfrac{\boxed{}}{DF}$ $\therefore$ DF = $\boxed{}$

कृती :



आकृती 1.32

Δ ABC मध्ये किरण BD हा $\angle$ ABC चा दुभाजक आहे. A-D-C रेख DE || बाजू BC, A-E-B, तर सिद्ध करा की, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AE}{EB}$

सिद्धता : Δ ABC मध्ये किरण BD हा $\angle$ B चा दुभाजक आहे.

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$ .... (कोन दुभाजकाचे प्रमेय) .... (I)

Δ ABC मध्ये DE || BC

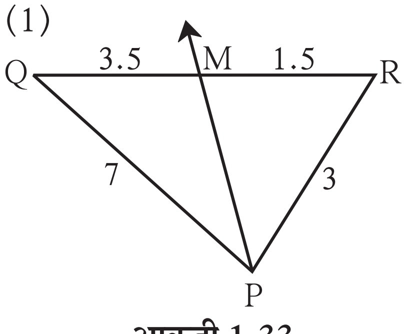
$\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AD}{DC}$ .... (. . . . .) .... (II)

$\dfrac{AB}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{EB}$ .... (I) व (II) वरून

सरावसंच 1.2

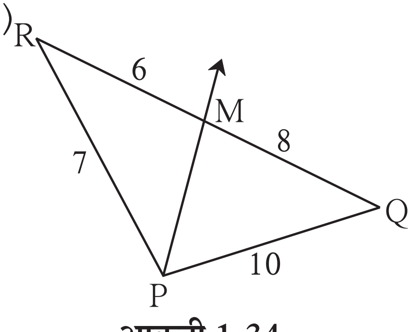
1. खाली काही त्रिकोण आणि रेषाखंडांच्या लांबी दिल्या आहेत. त्यांवरून कोणत्या आकृतीत किरण PM हा $\angle$ QPR चा दुभाजक आहे ते ओळखा.

(1)



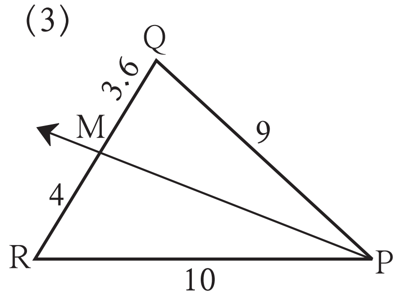
आकृती 1.33

(2)



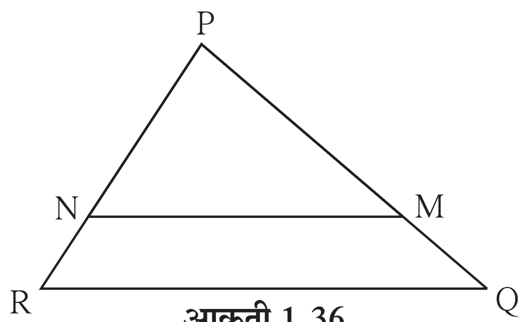
आकृती 1.34

(3)



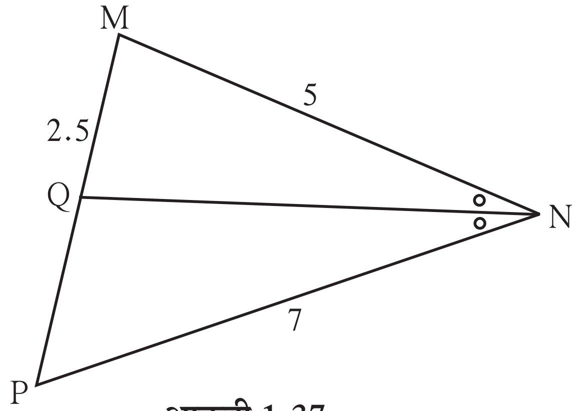
आकृती 1.35

2. जर Δ PQR मध्ये PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 तर रेषा NM ही बाजू RQ ला समांतर आहे का? कारण लिहा.

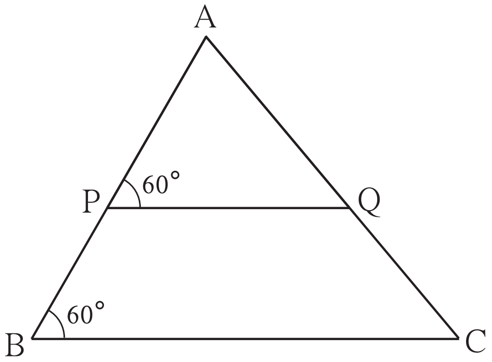


आकृती 1.36

3. Δ MNP च्या $\angle$ N चा NQ हा दुभाजक आहे. जर MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 तर QP काढा.



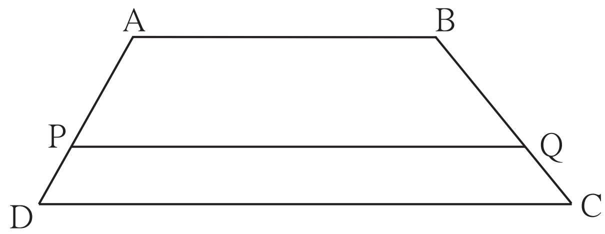
आकृती 1.37



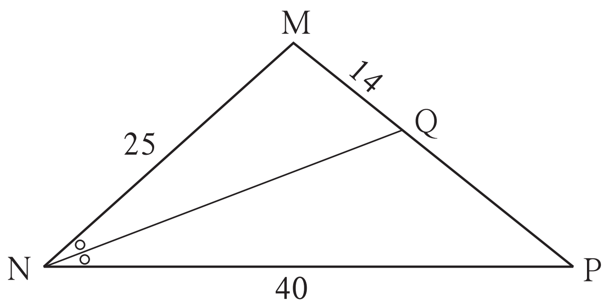
आकृती 1.38

4. आकृतीत काही कोनांची मापे दिली आहेत त्यावरून दाखवा, की $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

5. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, बाजू AB || बाजू PQ || बाजू DC, जर AP = 15, PD = 12, QC = 14 तर BQ काढा.



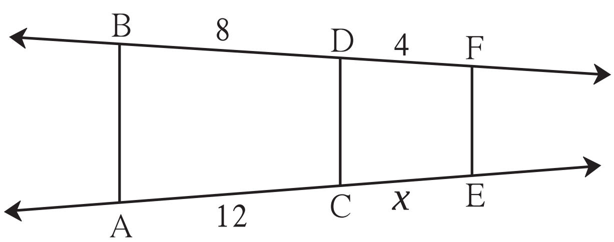
आकृती 1.39



आकृती 1.40

6. आकृती 1.40 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून QP काढा.

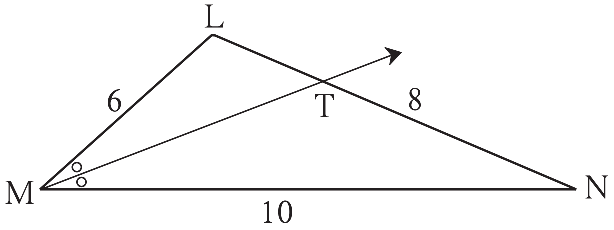
7. आकृती 1.41 मध्ये जर AB || CD || FE तर x ची किंमत काढा व AE काढा.



आकृती 1.41

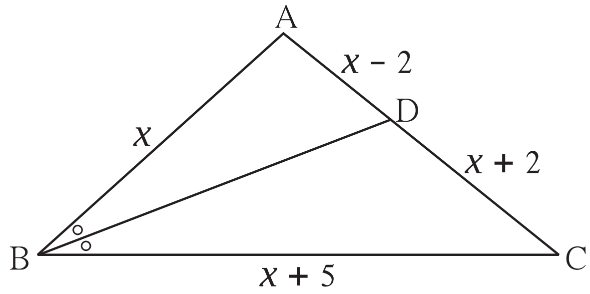
8. Δ LMN मध्ये किरण MT हा $\angle$ LMN चा दुभाजक आहे.

जर LM = 6, MN = 10, TN = 8 तर LT काढा.



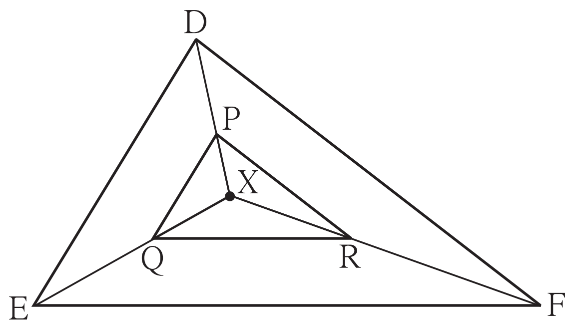
आकृती 1.42

9. Δ ABC मध्ये रेख BD हा $\angle$ ABC चा दुभाजक आहे, जर AB = x, BC = x + 5, AD = x – 2, DC = x + 2 तर x ची किंमत काढा.



आकृती 1.43

10. शेजारील आकृती 1.44 मध्ये त्रिकोणाच्या अंतर्भागात X हा एक कोणताही बिंदू आहे. बिंदू X हा त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंशी जोडला आहे. तसेच रेख PQ || रेख DE, रेख QR || रेख EF तर रेख PR || रेख DF हे सिद्ध करण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.



आकृती 1.44

सिद्धता : Δ XDE मध्ये PQ || DE .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{XP}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{QE}$ .... (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

Δ XEF मध्ये QR || EF .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ....(II) $\boxed{}$

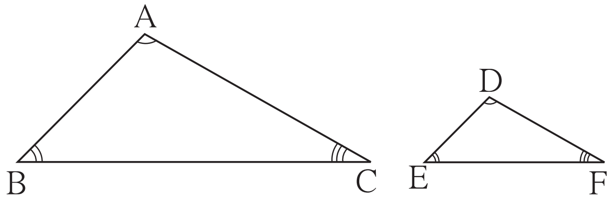
$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... विधान (I) व (II) वरून

$\therefore$ रेख PR || रेख DF .... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

11★. Δ ABC मध्ये AB = AC, $\angle$ B व $\angle$ C चे दुभाजक बाजू AC व बाजू AB यांना अनुक्रमे बिंदू D व E मध्ये छेदतात. तर सिद्ध करा, की रेख ED || रेख BC.

जरा आठवूया.

समरूप त्रिकोण (Similar triangles)



आकृती 1.45

Δ ABC व Δ DEF मध्ये जर $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

आणि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

तर Δ ABC व Δ DEF हे त्रिकोण समरूप असतात.

Δ ABC व Δ DEF समरूप आहेत हे $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ असे लिहितात.

जाणून घेऊया.

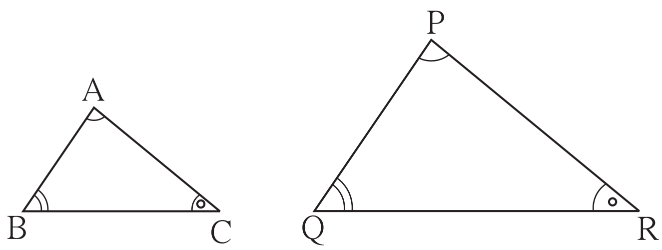
त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या कसोट्या (Tests for similarity of triangles)

दोन त्रिकोण समरूप असण्यासाठी त्यांच्या तिन्ही संगत बाजू प्रमाणात असणे आणि तिन्ही संगत कोन एकरूप असणे आवश्यक असते; परंतु या सहा अटींपैकी तीन विशिष्ट अटींची पूर्तता झाल्यास उरलेल्या अटींची पूर्तता आपोआप होते; म्हणजे दोन त्रिकोण समरूप होण्यासाठी तीनच विशिष्ट अटी पुरेशा असतात. या तीन अटी तपासून दोन त्रिकोण समरूप आहेत का हे ठरविता येते. अशा पुरेशा अटींचा समूह म्हणजेच समरूपतेच्या कसोट्या होत. म्हणून दोन त्रिकोण समरूप आहेत का हे ठरवण्यासाठी त्या विशिष्ट अटी तपासणे पुरेसे असते.

समरूपतेची कोकोको कसोटी (AAA test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील दिलेल्या एकास एक संगतीनुसार होणारे संगत कोन जर एकरूप असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

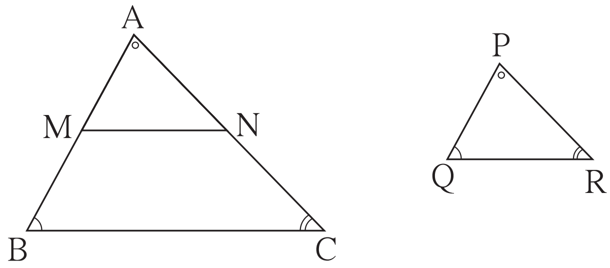
Δ ABC व Δ PQR मध्ये $ABC \leftrightarrow PQR$ या संगतीत जर $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, तर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



आकृती 1.46

अधिक माहितीसाठी :

कोकोको कसोटीची सिद्‌धता



आकृती 1.47

पक्ष : Δ ABC व Δ PQR मध्ये,
$\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,
$\angle C \cong \angle R$.

साध्य : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

सिद्‌धता : Δ ABC हा Δ PQR पेक्षा मोठा आहे असे मानू. मग AB वर बिंदू M, AC वर बिंदू N असा घ्या की, AM = PQ आणि AN = PR. त्यावरून $\Delta AMN \cong \Delta PQR$ हे दाखवा.

त्यावरून MN || BC दाखवता येते.

आता प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय वापरून, $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

म्हणजेच, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (व्यस्त करून)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... (योग क्रिया करून)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$. त्याचप्रमाणे $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ हे दाखविता येईल.

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

समरूप त्रिकोणांची कोको कसोटी (AA test for similarity of triangles)

शिरोबिंदूंच्या एखाद्या एकास एक संगतीनुसार एका त्रिकोणाचे दोन कोन जर दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत कोनांशी एकरूप असतील, तर पहिल्या त्रिकोणाचा उरलेला कोन हा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या कोनाशी एकरूप असतो हे आपल्याला माहीत आहे, म्हणजेच एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत कोनांशी एकरूप असतील तरीही ही अट दोन त्रिकोण समरूप होण्यासाठी पुरेशी असते.

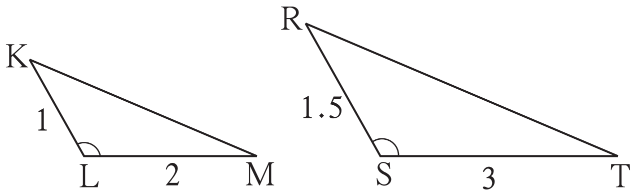
यावरून, एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.

या गुणधर्माला समरूपतेची कोको कसोटी म्हणतात.

समरूपतेची बाकोबा कसोटी (SAS test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या एखाद्या एकास एक संगतीनुसार त्यांच्या संगत बाजूंच्या दोन जोड्या एकाच प्रमाणात असतील आणि त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेले कोन एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.

उदाहरणार्थ, जर Δ KLM व Δ RST मध्ये



आकृती 1.48

$\angle KLM \cong \angle RST$

$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$

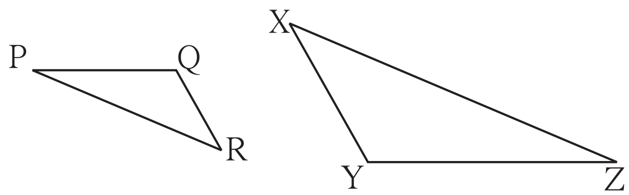
तर $\Delta KLM \sim \Delta RST$

समरूपतेची बाबाबा कसोटी (SSS test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूमधील एखाद्या एकास एक संगतीत जेव्हा एका त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंशी एकाच प्रमाणात असतात तेव्हा ते त्रिकोण समरूप असतात.

समरूपतेच्या या गुणधर्माला बाबाबा कसोटी म्हणतात.

उदाहरणार्थ, जर Δ PQR व Δ XYZ मध्ये जर,



आकृती 1.49

$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$

तर $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म :

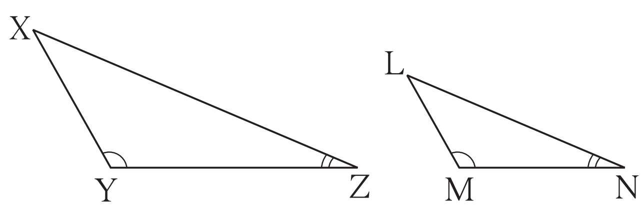
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – परावर्तनता (Reflexivity)

(2) जर $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तर $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – सममितता (Symmetry)

(3) जर $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ आणि $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ तर $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – संक्रामकता (Transitivity)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) Δ XYZ मध्ये $\angle Y = 100°$,
$\angle Z = 30°$,
Δ LMN मध्ये $\angle M = 100°$,
$\angle N = 30°$, तर Δ XYZ व Δ LMN
हे समरूप आहेत काय?,
असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार?



आकृती 1.50

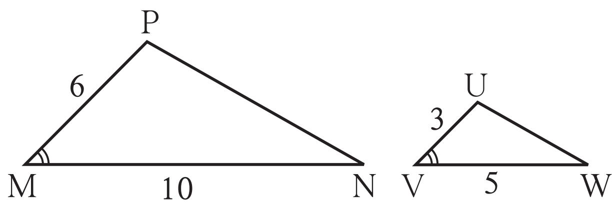
उकल : Δ XYZ व Δ LMN मध्ये,

$\angle Y = 100°$, $\angle M = 100°$ $\therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30°$, $\angle N = 30°$ $\therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (कोको कसोटीनुसार)

उदा. (2) आकृती 1.51 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून त्रिकोण समरूप आहेत का? असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार?



आकृती 1.51

उकल : Δ PMN व Δ UVW मध्ये

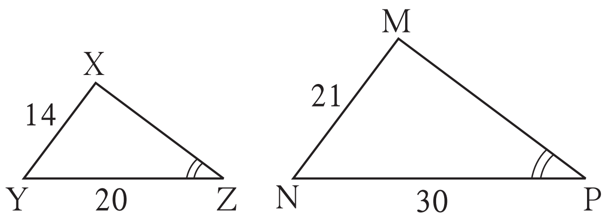
$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, $\frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$

आणि $\angle M \cong \angle V$ .... (पक्ष)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... (समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

उदा. (3) आकृती 1.52 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून त्रिकोण समरूप आहेत असे म्हणता येईल का? म्हणता येत असेल तर कोणत्या कसोटीनुसार ?



आकृती 1.52

उकल : Δ XYZ व Δ MNP मध्ये

$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$,

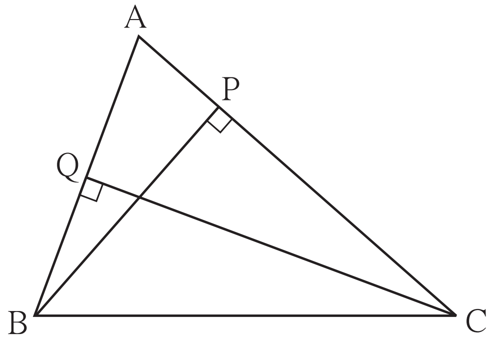
$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$

$\angle Z \cong \angle P$ दिले आहे. परंतु $\angle Z$ व $\angle P$ हे प्रमाणात असलेल्या बाजूंनी समाविष्ट केलेले कोन नाहीत.

$\therefore \Delta$ XYZ व Δ MNP हे समरूप आहेत असे म्हणता येणार नाही.

उदा. (4) शेजारील आकृतीमध्ये $BP \perp AC$, $CQ \perp AB$, A – P – C, A – Q – B, तर Δ APB व Δ AQC समरूप दाखवा.



आकृती 1.53

उकल : Δ APB व Δ AQC मध्ये

$\angle APB = \boxed{}^\circ$ (I)

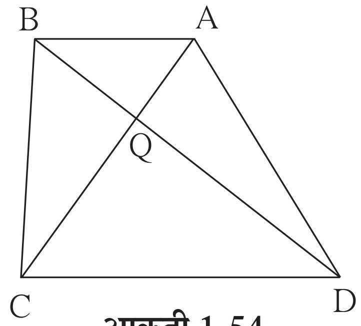
$\angle AQC = \boxed{}^\circ$ (II)

$\therefore \angle APB \cong \angle AQC$ .... (I) आणि (II) वरून

$\angle PAB \cong \angle QAC$ .... ($\boxed{}$)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta AQC$ ..... (कोको कसोटी)

उदा. (5) जर चौकोन ABCD चे कर्ण Q बिंदूत छेदत असतील आणि 2QA = QC आणि 2QB = QD. तर DC = 2AB दाखवा.



आकृती 1.54

पक्ष : 2QA = QC

2QB = QD

साध्य : CD = 2AB

सिद्धता : $2QA = QC \therefore \frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$ .... (I)

$2QB = QD \therefore \frac{QB}{QD} = \frac{1}{2}$ .... (II)

$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (I) व (II) वरून

Δ AQB व Δ CQD मध्ये

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (सिद्ध केले)

$\angle AQB \cong \angle DQC$ .... (परस्पर विरुध्द कोन)

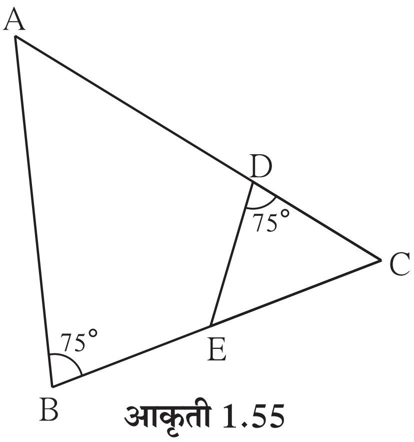
$\therefore \Delta AQB \sim \Delta CQD$ .... (समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$ .... (संगत बाजू प्रमाणात)

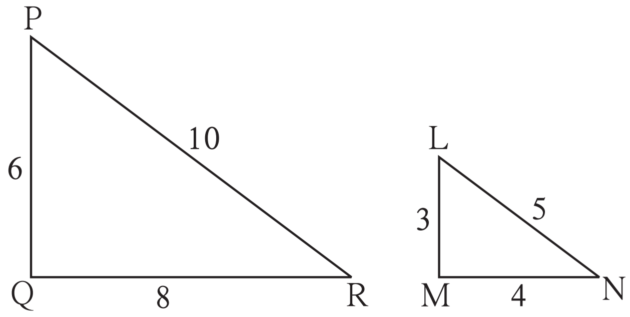
परंतु $\frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

$\therefore 2AB = CD$

1. आकृती 1.55 मध्ये $\angle ABC = 75°$, $\angle EDC = 75°$ तर कोणते दोन त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार समरूप आहेत? त्यांची समरूपता योग्य एकास एक संगतीत लिहा.



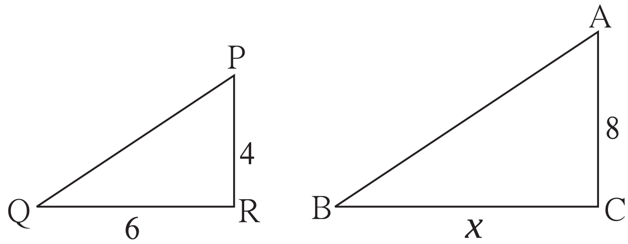
आकृती 1.55



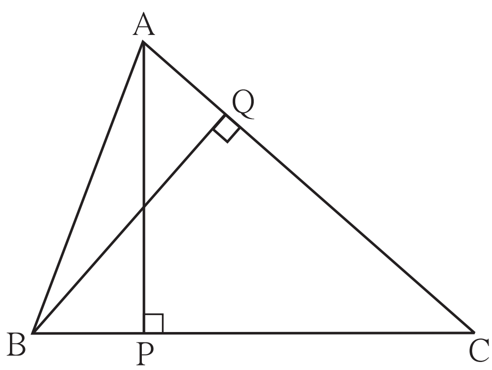
आकृती 1.56

2. आकृती 1.56 मधील त्रिकोण समरूप आहेत का? असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार ?

3. आकृती 1.57 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे 8 मीटर व 4 मीटर उंचीचे दोन खांब सपाट जमिनीवर उभे आहेत. सूर्यप्रकाशाने लहान खांबाची सावली 6 मीटर पडते, तर त्याच वेळी मोठ्या खांबाची सावली किती लांबीची असेल?



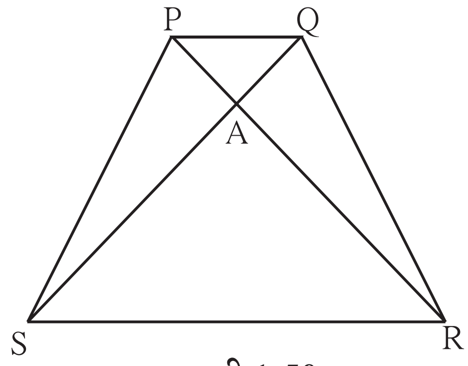
आकृती 1.57



आकृती 1.58

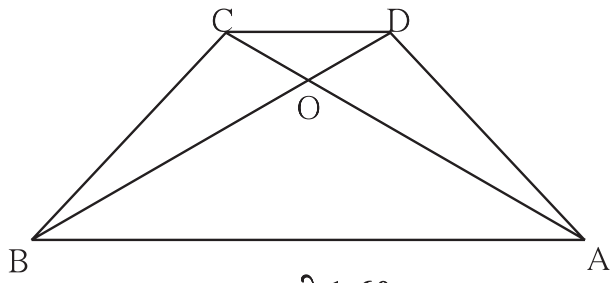
4. Δ ABC मध्ये $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$ B- P-C, A-Q - C तर, $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ दाखवा. जर $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$ तर AC काढा.

5. आकृतीत समलंब चौकोन PQRS मध्ये, बाजू PQ $\parallel$ बाजू SR, AR = 5AP, AS = 5AQ तर सिद्ध करा, SR = 5PQ



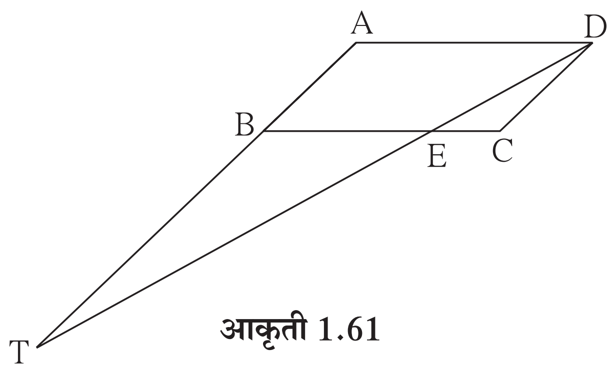
आकृती 1.59

6. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, (आकृती 1.60) बाजू AB $\parallel$ बाजू DC कर्ण AC व कर्ण BD हे परस्परांना O बिंदूत छेदतात. AB = 20, DC = 6, OB = 15 तर OD काढा.



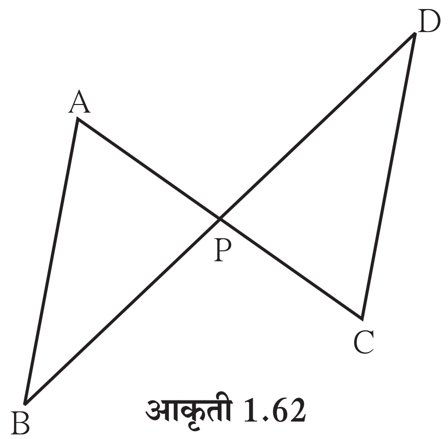
आकृती 1.60

7. □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. बाजू BC वर E हा एक बिंदू आहे, रेषा DE ही किरण AB ला T बिंदूत छेदते. तर DE × BE = CE × TE दाखवा.



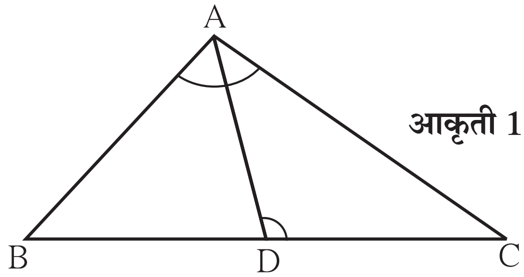
आकृती 1.61

8. आकृतीत रेख AC व रेख BD परस्परांना P बिंदूत छेदतात आणि $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ तर सिद्ध करा, Δ ABP ~ Δ CDP



आकृती 1.62

9. आकृतीत Δ ABC मध्ये बाजू BC वर D हा बिंदू असा आहे, की $\angle$ BAC = $\angle$ ADC तर सिद्ध करा, $CA^2 = CB \times CD$

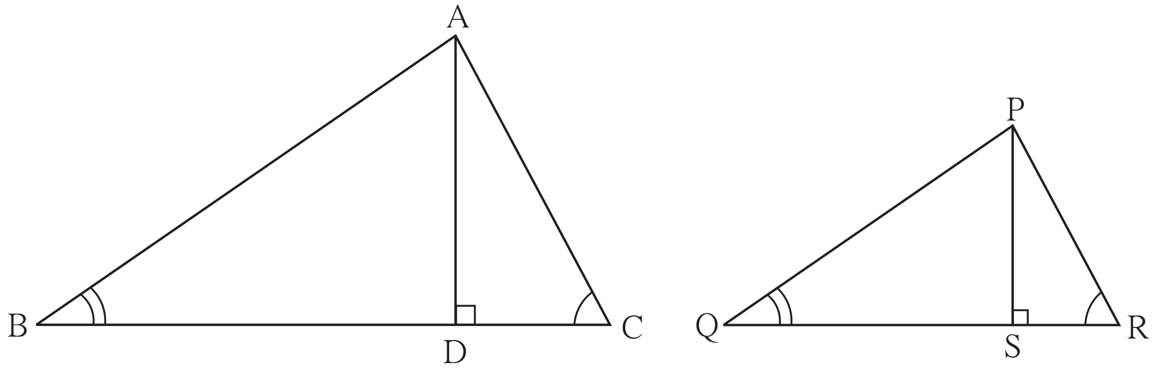


आकृती 1.63

जाणून घेऊया.

समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय (Theorem of areas of similar triangles)

प्रमेय : **जर दोन त्रिकोण समरूप असतील तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत भुजांच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.**



आकृती 1.64

पक्ष : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

साध्य : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

सिद्धता : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

ΔABD व ΔPQS मध्ये

$\angle B = \angle Q$ .... (पक्ष)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ कोको कसोटीनुसार $\Delta ABD \sim \Delta PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

परंतु $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II) व (III) वरून

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 16$, $A(\Delta PQR) = 25$ तर $\frac{AB}{PQ}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

उकल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ ....(समरूपत्रिकोणांच्याक्षेत्रफळांचेगुणोत्तरसंगतबाजूंच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (वर्गमुळे घेऊन)

उदा. (2) दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजांचे गुणोत्तर 2:5 आहे , लहान त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 64 चौसेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ मानू.

ΔABC हा लहान त्रिकोण व ΔPQR हा मोठा त्रिकोण आहे, असे मानू.

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची गुणोत्तरे)

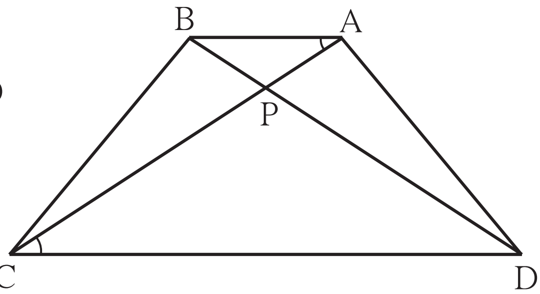
$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ मोठ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 400 चौसेमी

उदा. (3) समलंब चौकोन ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू CD, कर्ण AC व कर्ण BD हे एकमेकांना P मध्ये छेदतात, तर सिद्ध करा $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



आकृती 1.65

उकल : समलंब चौकोन ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू CD

ΔAPB व ΔCPD मध्ये

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ..... (व्युत्क्रम कोन)

$\angle APB \cong \angle CPD$ ..... (परस्पर विरुद्ध कोन)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ ..... (कोको कसोटी)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

सरावसंच 1.4

1. दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर 3 : 5 आहे, तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

2. Δ ABC ~ Δ PQR आणि AB : PQ = 2:3, तर खालील चौकटी पूर्ण करा.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\boxed{}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

3. Δ ABC ~ Δ PQR, A (Δ ABC) = 80, A(Δ PQR) = 125, तर खालील चौकटी पूर्ण करा.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \ldots\ldots)} = \frac{80}{125} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

4. Δ LMN ~ Δ PQR, $9 \times A(\Delta PQR) = 16 \times A(\Delta LMN)$ जर QR = 20 तर MN काढा.

5. दोन समरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे 225 चौसेमी व 81 चौसेमी आहेत. जर लहान त्रिकोणाची एक बाजू 12 सेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाची संगत बाजू काढा.

6. Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत. A (ΔABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 असून AB = 4 तर DE ची लांबी काढा .

7. आकृती 1.66 मध्ये रेख PQ || रेख DE, A (Δ PQF) = 20 एकक, जर PF = 2 DP आहे, तर A($\square$ DPQE) काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

A(Δ PQF) = 20 एकक, PF = 2 DP, DP = x मानू. $\therefore$ PF = 2x

DF = DP + $\boxed{}$ = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ = 3x

Δ FDE व Δ FPQ मध्ये

$\angle$ FDE $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (संगत कोन)

$\angle$ FED $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (संगत कोन)

$\therefore$ Δ FDE ~ Δ FPQ .... (कोको कसोटी)

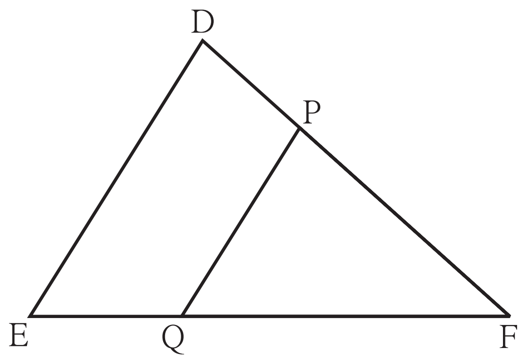
$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$A(\square DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$



आकृती 1.66

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील उपप्रश्नांची पर्यायी उत्तरे दिली आहेत त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

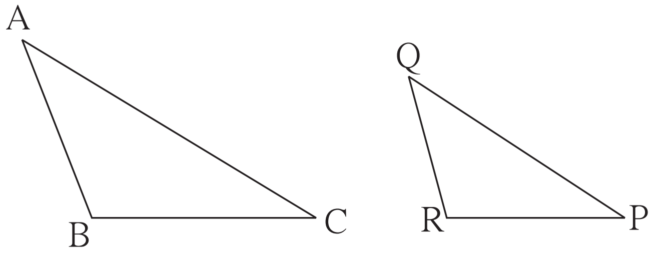
(1) जर Δ ABC व Δ PQR मध्ये एका एकास एक संगतीत $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ तर खालीलपैकी सत्य विधान कोणते ?

(A) Δ PQR ~ Δ ABC

(B) Δ PQR ~ Δ CAB

(C) Δ CBA ~ Δ PQR

(D) Δ BCA ~ Δ PQR

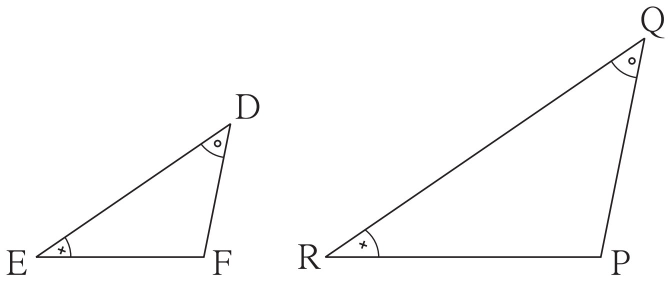


आकृती 1.67

(2) जर Δ DEF व Δ PQR मध्ये, $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$, तर खालीलपैकी असत्य विधान कोणते ?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



आकृती 1.68

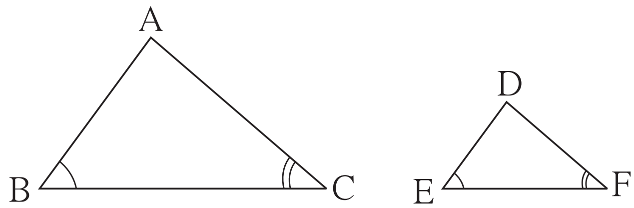
(3) Δ ABC व Δ DEF मध्ये $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ आणि AB = 3 DE, तर त्या दोन त्रिकोणांबाबत सत्य विधान कोणते ?

(A) ते एकरूप नाहीत आणि समरूपही नाहीत.

(B) ते समरूप आहेत पण एकरूप नाहीत.

(C) ते एकरूप आहेत आणि समरूपही आहेत.

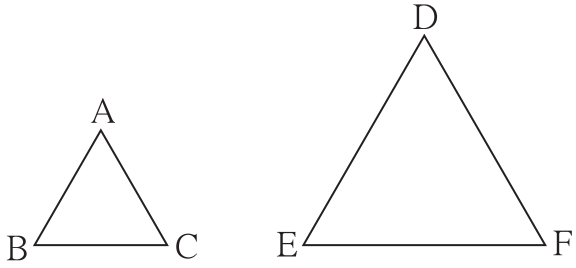
(D) वरीलपैकी एकही विधान सत्य नाही.



आकृती 1.69

(4) Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत, $A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 1 : 2$ असून AB = 4 आहे तर DE ची लांबी किती ?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

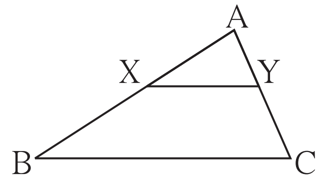


आकृती 1.70

(5) आकृती 1.71 मध्ये रेख XY || रेख BC तर खालील पैकी कोणते विधान सत्य आहे ?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



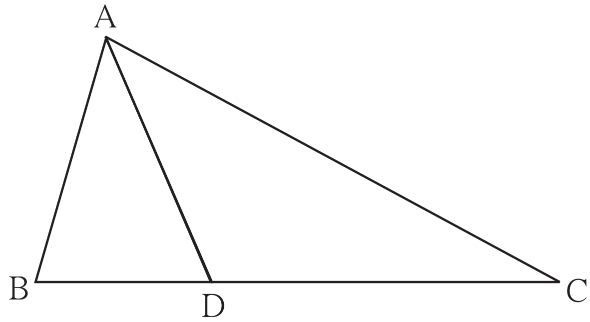
आकृती 1.71

2. Δ ABC मध्ये B – D – C आणि BD = 7, BC = 20 तर खालील गुणोत्तरे काढा.

(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

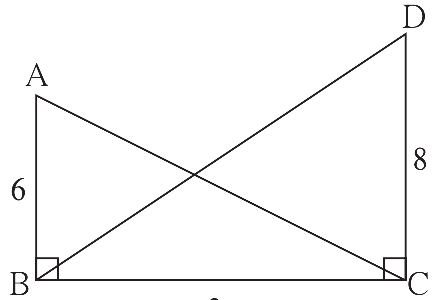
(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



आकृती 1.72

3. समान उंचीच्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे, लहान त्रिकोणाचा पाया 6 सेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाचा संगत पाया किती असेल ?

4. 

आकृती 1.73

आकृती 1.73 मध्ये $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

AB = 6, DC = 8

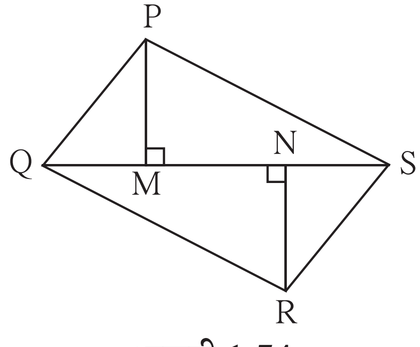
तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ = किती ?

5. आकृती 1.74 मध्ये PM = 10 सेमी

A(Δ PQS) = 100 चौसेमी

A(ΔQRS) = 110 चौसेमी

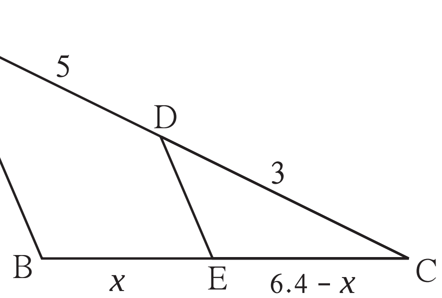
तर NR काढा.



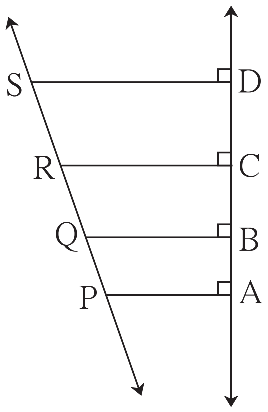
आकृती 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS बिंदू T पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 5 असून बिंदू S पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 9 आहे, तर $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ हे गुणोत्तर काढा.

7. आकृती 1.75 मध्ये A – D – C व B – E – C . रेख DE || बाजू AB. जर AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 तर BE काढा.



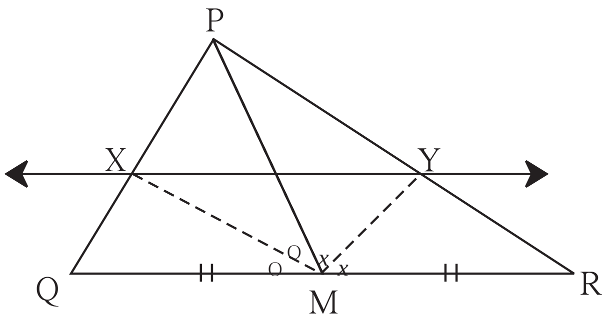
आकृती 1.75



आकृती 1.76

8. आकृती 1.76 मध्ये, रेख PA, रेख QB, रेख RC व रेख SD हे रेषा AD ला लंब आहेत. AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280, तर PQ, QR, RS काढा.

9. Δ PQR मध्ये रेख PM ही मध्यगा आहे. $\angle$PMQ व $\angle$PMR चे दुभाजक बाजू PQ व बाजू PR ला अनुक्रमे X आणि Y बिंदूत छेदतात, तर सिद्ध करा XY || QR.



आकृती 1.77

सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

Δ PMQ मध्ये किरण MX हा $\angle$PMQ चा दुभाजक आहे.

$$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$ .... (I) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

Δ PMR मध्ये किरण MY हा $\angle$PMR चा दुभाजक आहे.

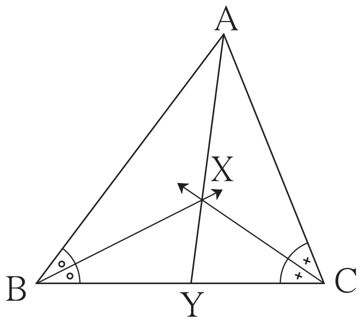
$$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$ .... (II) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

परंतु $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$ .... (M हा QR चा मध्य म्हणजेच MQ = MR)

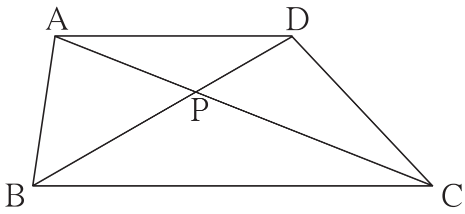
$$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$$

$\therefore$ XY || QR .... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

10★. आकृती 1.78 मध्ये Δ ABC च्या $\angle$ B व $\angle$ C चे दुभाजक एकमेकांना X मध्ये छेदतात, रेषा AX ही बाजू BC ला Y मध्ये छेदते जर AB = 5, AC = 4, BC = 6 तर $\frac{AX}{XY}$ ची किंमत काढा.



आकृती 1.78



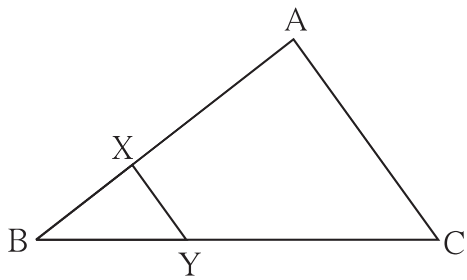
आकृती 1.79

11. $\square$ ABCD मध्ये रेख AD $\parallel$ रेख BC. कर्ण AC आणि कर्ण BD परस्परांना बिंदू P मध्ये छेदतात. तर दाखवा की $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$

12. आकृती 1.80 मध्ये XY $\parallel$ बाजू AC.

जर 2AX = 3BX आणि XY = 9 तर

AC ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



आकृती 1.80

कृती : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX+BX}{BX} = \frac{\square + \square}{\square}$ .... (योग क्रिया करून)

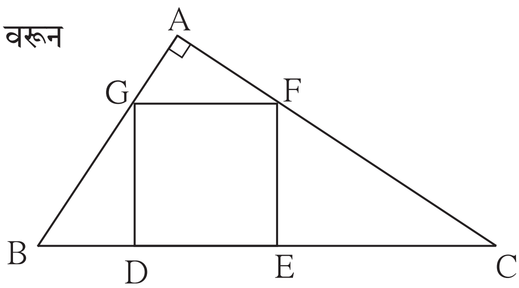
$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ .... (I)

Δ BCA ~ Δ BYX .... (समरूपतेची $\square$ कसोटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (समरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू)

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\square$ ....(I) वरून

13★. Δ ABC मध्ये $\angle A = 90°$. $\square$ DEFG या चौरसाचे D व E हे शिरोबिंदू बाजू BC वर आहेत. बिंदू F हा बाजू AC वर आणि बिंदू G हाबाजू AB वर आहे. तर सिद्ध करा. $DE^2 = BD \times EC$ (Δ GBD व Δ CFE हे समरूप दाखवा. GD = FE = DE याचा उपयोग करा.)



आकृती 1.81