3 अंकगणिती श्रेढी

चला, शिकूया.

- क्रमिका
- अंकगणिती श्रेढी
- अंकगणिती श्रेढीतील n वे पद
- अंकगणिती श्रेढीतील n पदांची बेरीज

जाणून घेऊया.

क्रमिका (Sequence)

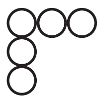
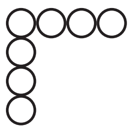
आपण 1, 2, 3, 4, . . . या संख्या क्रमाने लिहितो. ही संख्यांची मालिका आहे. या मालिकेतील कोणतीही संख्या कितव्या स्थानावर आहे हे आपण सांगू शकतो. जसे 13 ही संख्या 13 व्या क्रमांकावर आहे. संख्यांची दुसरी मालिका 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . पाहा. या संख्या विशिष्ट क्रमाने लिहिल्या आहेत. येथे $16 = 4^2$ ही संख्या चौथ्या क्रमांकावर, तर $25 = 5^2$ ही संख्या 5 व्या स्थानावर आहे. $49 = 7^2$ ही संख्या सातव्या स्थानावर आहे. म्हणजे याही मालिकेत कोणतीही संख्या कितव्या स्थानावर आहे, हे सांगता येते.

नैसर्गिक संख्यांच्याप्रमाणे विशिष्ट क्रमाने मांडलेल्या संख्यांच्या समूहाला **क्रमिका** म्हणतात.

क्रमिकेमध्ये विशिष्ट स्थानावर विशिष्ट संख्या लिहिली जाते. त्या संख्या $a_1, a_2, a_3, a_4 . . ., a_n$ अशा क्रमाने दर्शवल्या की a_1 ही पहिली, a_2 ही दुसरी, . . . याप्रमाणे a_n ही n वी संख्या आहे हे स्पष्ट होते. संख्यांची क्रमिका $f_1, f_2, f_3, . . .$ अशा अक्षरांनीदेखील दर्शवली जाते. तिच्यात निश्चित क्रमाने संख्या लिहिल्या आहेत हे समजते.

एखाद्या वर्गातील मुले कवायतीसाठी मैदानावर गेल्यावर एका ओळीत उभी राहतात. त्यांचा क्रम ठरलेला असतो, तेव्हा त्यांची क्रमिका तयार होते. काही क्रमिकांमध्ये विशिष्ट आकृतिबंध असतो हे आपण अनुभवले आहे.

कृती : पुढील आकृतिबंध पूर्ण करा.

आकृतिबंध								
वर्तुळांची संख्या	1	3	5	7				

आकृतिबंध	ΔΔ Δ ΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ				
त्रिकोणांची संख्या	5	8	11				

संख्यांचे तयार झालेले आकृतिबंध पाहा. आधीच्या संख्येवरून पुढील संख्या मिळवण्याचा नियम शोधा. या नियमावरून पुढच्या सगळ्या संख्या लिहिता येतात.

संख्यांची पुढील मालिका पाहा. 2, 11, −6, 0, 5, −37, 8, 2, 61

येथे $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = -6$, . . . ही संख्यांची यादीदेखील क्रमिका आहे, परंतु विशिष्ट पदे त्या स्थानावर का आहेत हे सांगता येत नाही, तसेच क्रमवार पदांतील संबंधही निश्चितपणे सांगता येत नाही.

साधारणपणे ज्या क्रमिकेमध्ये पुढचे पद ठरवता येईल असा नियम असतो, अशा क्रमिका विचारात घेतल्या जातात.

उदा. (1) 4, 8, 12, 16, . . . (2) 2, 4, 8, 16, 32, . . .

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$

क्रमिकेतील पदे (Terms in a sequence)

क्रमिकेतील क्रमवार पदे $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n \ldots$.या प्रकारेही दर्शवतात. सामान्यपणे क्रमिका ही $\{t_n\}$ अशी लिहितात. क्रमिका अनंत असेल, तर प्रत्येक धन पूर्णांक n, याच्याशी निगडित अशी एक संख्या आहे असे गृहीत धरले जाते.

कृती I : खालील क्रमिका पाहा. यातील पदांचे क्रमांक t_1, t_2, t_3 . . . ने दाखवा.

(1) 9, 15, 21, 27, . . . येथे $t_1 = 9$, $t_2 = 15$, $t_3 = 21$, . . .

(2) 7, 7, 7, 7, . . . येथे $t_1 = 7$, $t_2 = \boxed{}$, $t_3 = \boxed{}$, . . .

(3) −2, −6, −10, −14, . . . येथे $t_1 = -2$, $t_2 = \boxed{}$, $t_3 = \boxed{}$, . . .

कृती II : खाली काही क्रमिका दिल्या आहेत. त्यांच्या पदांमध्ये काही नियम आढळतो का ते पाहा. दोन क्रमिकांमधील साम्य शोधा.

क्रमिकांच्या पदांमध्ये काही नियम आढळतो का हे पाहण्यासाठी पुढे दिलेली मांडणी पाहा आणि पुढील पानावरील रिकाम्या चौकटी भरा.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . . (3) 3, 3, 3, 3, . . .

(4) 4, 16, 64, . . . (5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

या क्रमिकांमधील संबंध शोधू. त्यासाठी केलेला विचार पाहू.

(1) 1   4   7   10 $\boxed{}$ $\boxed{}$, . . .

1 (+3)   4 (+3)   7 (+3)   10 (+3) $\boxed{}$

(2) 6   12   18   24 $\boxed{}$ $\boxed{}$, . . .

6 + 6   12 + 6   18 + 6 $\boxed{}$ $\boxed{}$

(3) 3   3   3   3 $\boxed{}$ $\boxed{}$ . . .

3 + 0   3 + 0   3 + 0 $\boxed{}$ $\boxed{}$

(4) 4   16   64 $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$, . . .

4 × 4   16 × 4   64 × 4 $\boxed{}$ × 4 $\boxed{}$ × 4

(5) −1   −1.5   −2   −2.5 $\boxed{}$ . . .

(−1)+(−0.5)   −1.5 +(−0.5)   −2 + (−0.5)   −2.5 + (−0.5)

(6) 1^3, 2^3, 3^3, . . .

येथे क्रमिका (1), (2), (3), (5) यांच्यामध्ये आधीच्या पदात ठराविक संख्या मिळवून पुढचे पद मिळते, हे साम्य आहे. या प्रकारच्या क्रमिकांना अंकगणिती श्रेढी म्हणतात.

वरील (4) ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी नाही. या क्रमिकेमध्ये आधीच्या पदाला ठरावीक संख्येने गुणून पुढचे पद मिळते. या प्रकारच्या क्रमिकांना भूमिती श्रेढी (Geometric Progression) म्हणतात.

वरील (6) ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी नाही, तसेच भूमिती श्रेढीही नाही.

यावर्षी आपण अंकगणिती श्रेढीचा अभ्यास करणार आहोत.

अंकगणिती श्रेढी (Arithmetic Progression)

खाली काही क्रमिका दिल्या आहेत. प्रत्येक क्रमिकेतील पुढील तीन पदे लिहा.

(1) 100, 70, 40, 10, . . .   (2) −7, −4, −1, 2, . . .   (3) 4, 4, 4, . . .

दिलेल्या क्रमिकांमधील पुढील पदे काढण्यासाठी काय केले ते पाहा.

पहिले पद दुसरे पद तिसरे पद

(1) 100, 70, 40, 10, $\boxed{-20}$, $\boxed{-50}$ . . .

100+(−30) 70+(−30) 40+(−30) 10+(−30) (−20)+(−30)

(2) −7, −4, −1, 2, $\boxed{5}$, $\boxed{8}$ . . .

−7+3 −4+3 −1+3 2+3 5+3

(3) 4, 4, 4, 4, 4 . . .

4 + 0 4 + 0 4 + 0 4 + 0

वरील संख्यांच्या प्रत्येक यादीतील प्रत्येक पद आधीच्या पदात विशिष्ट संख्या मिळवून तयार झाले आहे. दोन क्रमागत पदांमधील फरक स्थिर आहे.

उदा. (1) मधील फरक ऋण, (2) मधील फरक धन आणि (3) मधील फरक 0 आहे.

क्रमागत पदांमधील फरक स्थिर असेल तर त्याला **सामान्य फरक किंवा सामाईक फरक (Common difference)** म्हणतात. हा फरक d या अक्षराने दर्शवतात.

दिलेल्या क्रमिकेतील कोणत्याही दोन क्रमागत पदांमधील फरक $(t_{n+1} - t_n)$ स्थिर असेल तर त्या क्रमिकेस अंकगणिती श्रेढी म्हणतात. अशा श्रेढीत $t_{n+1} - t_n = d$ हा सामान्य फरक असतो.

अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a आणि सामान्य फरक d असेल,

तर $t_1 = a$, $t_2 = a + d$, $t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

पहिले पद a आणि सामान्य फरक d असलेली अंकगणिती श्रेढी

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ldots\ldots$ ही असते.

अंकगणिती श्रेढीसंबंधी काही उदाहरणे पाहू.

उदा. (1) अरिफाने दर महिन्याला 100 रुपयांची बचत केली. एका वर्षातील प्रत्येक महिनाअखेरची एकूण बचत खालीलप्रमाणे असेल.

महिना	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
बचत ₹	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

प्रत्येक महिन्यातील एकूण बचत दाखवणाऱ्या संख्या अंकगणिती श्रेढीत आहेत.

(2) प्रणवने मित्राकडून 10000 रुपये उसने घेतले आणि दरमहा 1000 रुपये याप्रमाणे फेडायचे ठरले, तर प्रत्येक महिन्यात फेडायची राहिलेली रक्कम खालीलप्रमाणे असेल.

महिना क्र.	1	2	3	4	5	...	...	...	...
फेडायची राहिलेली रक्कम ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

(3) 5 चा पाढा, म्हणजे 5 ने विभाज्य संख्या पाहा.

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, ... ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

वरील (1) व (2) या अंकगणिती श्रेढी सांत आहेत. तर (3) ही अंकगणिती श्रेढी अनंत श्रेढी आहे.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) जर क्रमिकेमध्ये $(t_{n+1} - t_n)$ हा फरक स्थिर असेल तर त्या क्रमिकेला अंकगणिती श्रेढी म्हणतात.

(2) अंकगणिती श्रेढीच्या दोन क्रमागत पदांमधील स्थिर फरक d या अक्षराने दर्शवतात.

(3) d हा फरक धन, ऋण किंवा शून्य असू शकतो.

(4) अंकगणिती श्रेढीतील पहिले पद a, आणि सामान्य फरक d असेल तर त्या श्रेढीतील पदे $a, (a + d), (a + 2d),$ . . . अशी असतात.

कृती : सांत अंकगणिती श्रेढीचे एक आणि अनंत अंकगणिती श्रेढीचे एक उदाहरण लिहा.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालीलपैकी कोणती क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे हे ओळखा. जर असेल तर तिची पुढील दोन पदे काढा.

(i) 5, 12, 19, 26, . . .   (ii) 2, −2, −6, −10, . . .

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . .   (iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

उकल : (i) 5, 12, 19, 26, . . . या क्रमिकेत,

पहिले पद $= t_1 = 5, \quad t_2 = 12, \quad t_3 = 19, \ldots$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

येथे पहिले पद = 5 व सामान्य फरक = d = 7 आहे. तो स्थिर आहे.

∴ ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे. या श्रेढीतील पुढील दोन पदे.

26 + 7 = 33,   33 + 7 = 40.

येथे 33 व 40 ही दिलेल्या श्रेढीतील पुढील दोन पदे आहेत.

(ii) $2, -2, -6, -10, \ldots$ या क्रमिकेत,

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

यावरून प्रत्येक दोन क्रमागत पदांमधील फरक, म्हणजे $t_{n+1} - t_n = -4$ आहे. $\therefore$ $d = -4$ हा सामाईक फरक आहे. तो स्थिर आहे. $\therefore$ ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

या श्रेढीतील पुढील दोन पदे $(-10) + (-4) = -14$ आणि $(-14) + (-4) = -18$ ही आहेत.

(iii) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ या क्रमिकेत,

$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \qquad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

या क्रमिकेतील लगतच्या दोन पदांमधील फरक स्थिर नाही. $\therefore$ दिलेली क्रमिका अंकगणिती श्रेढी नाही.

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ या क्रमिकेत,

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

येथे सामान्य फरक $d = -1$ हा स्थिर आहे.

$\therefore$ दिलेली क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

यातील पुढील दोन पदे शोधू.

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \qquad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ पुढील दोन पदे $-\frac{5}{2}$ व $-\frac{7}{2}$ आहेत.

उदा. (2) पहिले पद a व सामान्य फरक d खाली दिले आहेत. त्यानुसार पहिली चार पदे काढून अंकगणिती श्रेढी लिहा.

(i) $a = -3, \quad d = 4$ (ii) $a = 200, \quad d = 7$

(iii) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$ (iv) $a = 8, \quad d = -5$

उकल : (i) $a = -3$, $d = 4$ यावरून,

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $-3, 1, 5, 9, \ldots$

(ii) $a = 200$, $d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $200, 207, 214, 221, \ldots$

(iii) $a = -1$, $d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$

(iv) $a = 8$, $d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $8, 3, -2, -7, \ldots$

सरावसंच 3.1

1. खालीलपैकी कोणत्या क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहेत? ज्या अंकगणिती श्रेढी असतील, त्यांतील प्रत्येकीचा सामाईक फरक काढा.

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

2. जर अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a व सामान्य फरक d असेल तर अंकगणिती श्रेढी लिहा.

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

3. खालील प्रत्येक अंकगणिती श्रेढीसाठी पहिले पद आणि सामान्य फरक काढा.

(1) 5, 1, −3, −7, . . .   (2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . .   (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

विचार करूया.

- 5, 8, 11, 14, . . . ही अंकगणिती श्रेढी आहे का? जर असेल तर तिचे 100 वे पद कोणते असेल? या श्रेढीत 92 ही संख्या असेल का? 61 ही संख्या असेल का?

जाणून घेऊया.

अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14, . . . या क्रमिकेत दोन क्रमागत पदांमधील फरक 3 आहे म्हणून ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

यात पहिले पद 5 आहे. 5 मध्ये 3 मिळवल्यावर 8 हे दुसरे पद मिळते. या प्रकारे 100 वे पद मिळवण्यासाठी काय करावे लागेल?

	पहिले पद	दुसरे पद	तिसरे पद	. . .
संख्या	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11,	. . .

या पद्धतीने 100 व्या पदापर्यंत जाण्यासाठी खूप वेळ लागेल. यासाठी एखादे सूत्र मिळते का ते पाहू.

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	5 + 1 × 3	5 + 2 × 3	5 + 3 × 3	. . .	5 + (n − 1) × 3	5 + n × 3	. . .
पहिले पद t_1	दुसरे पद t_2	तिसरे पद t_3	चौथे पद t_4	. . .	n वे पद t_n	n + 1 वे पद t_{n+1}	. . .

सामान्यपणे; $t_1, t_2, t_3, \ldots$ या अंकगणिती श्रेढीतील पहिले पद a आणि साधारण फरक d असेल, तर

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\, d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$t_n = a + (n - 1)\, d$ हे सूत्र मिळते.

आता या सूत्राचा उपयोग करून 5, 8, 11, 14, . . . या अंकगणिती श्रेढीचे 100 वे पद काढू. येथे $a = 5$ आणि $d = 3$ आहे.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore\ t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

या अंकगणिती श्रेढीचे 100 वे पद 302 आहे.

आता 61 ही संख्या या श्रेढीत आहे का? याचे उत्तर मिळवण्यासाठी हेच सूत्र वापरू.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

जर 61 हे n वे पद म्हणजे t_n असेल, तर

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore\ 3n = 59$$

$$\therefore\ n = \frac{59}{3}$$

परंतु n ही नैसर्गिक संख्या नाही.

$\therefore$ 61 ही संख्या या श्रेढीत नाही.

विचार करूया.

कबीरची आई त्याच्या प्रत्येक वाढदिवसाला त्याच्या उंचीची नोंद करते. तो 1 वर्षाचा झाला तेव्हा त्याची उंची 70 सेमी होती. 2 वर्षांचा झाला तेव्हा तो 80 सेमी उंच होता, 3 वर्षांचा झाला तेव्हा त्याची उंची 90 सेमी झाली. त्याची मीरामावशी दहावीत शिकत होती. ती म्हणाली, 'कबीरची उंची दरवर्षी अंकगणित श्रेणीत वाढते असं दिसतं आहे.' ते गृहीत धरून तिने कबीर 15 वर्षांचा होऊन दहावीत गेला, की त्याची उंची किती असेल ते मोजले. तिला आश्चर्याचा धक्का बसला. तुम्हीही कबीरची उंची अंकगणिती श्रेणीत वाढते हे गृहीत धरून तो 15 वर्षांचा झाल्यावर त्याची उंची किती असेल ते शोधा.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालील अंकगणिती श्रेढीसाठी t_n काढा व त्यावरून त्या श्रेढीचे 30 वे पद काढा.

3, 8, 13, 18, . . .

उकल : दिलेली अंकगणिती श्रेढी 3, 8, 13, 18, . . .

येथे $t_1 = 3,\ t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 18, \ldots$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5,\quad n = 30$

आपणांस माहीत आहे की $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \quad \because a = 3,\ d = 5$

$\therefore t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30 वे पद $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 = 148$

उदा. (2) खालील अंकगणिती श्रेढीचे कितवे पद 560 आहे?

2, 11, 20, 29, . . .

उकल : दिलेली अंकगणिती श्रेढी 2, 11, 20, 29, . .

येथे $a = 2,\ d = 11 - 2 = 9$

या श्रेढीचे n वे पद 560 आहे. $t_n = 560$

$t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore 560 = 2 + (n - 1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore 9n = 567$

$\therefore n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीचे 63 वे पद 560 आहे.

उदा. (3) दिलेली क्रमिका 5, 11, 17, 23, . . आहे. या क्रमिकेत 301 ही संख्या आहे का?

उकल : 5, 11, 17, 23, . . . या क्रमिकेत

$t_1 = 5,\ t_2 = 11,\ t_3 = 17,\ t_4 = 23, \ldots$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

या श्रेढीचे पहिले पद $a = 5$ आणि $d = 6$

जर 301 हे n वे पद असेल, तर

$t_n = a + (n - 1)d = 301$

$\therefore 301 = 5 + (n - 1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore n = \frac{302}{6}$, हा धन पूर्णांक नाही.

यावरून दिलेल्या क्रमिकेत 301 ही संख्या असणार नाही.

उदा. (4) 4 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्या किती असतील?

उकल : 4 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्यांची यादी 12, 16, 20, 24, . . . 96 ही आहे.

अशा संख्या किती आहेत ते काढू.

$t_n = 96,\ a = 12,\ d = 4,\ n = ?$

$\therefore$ सूत्रावरून,

$96 = 12 + (n - 1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore 4n = 88$

$\therefore n = 22$

$\therefore$ 4 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्या 22 आहेत.

उदा. (5) जर एका अंकगणिती श्रेढीचे 10 वे पद 25 आणि 18 वे पद 41 असेल तर त्या श्रेढीचे 38 वे पद शोधा. तसेच, n वे पद 99 असेल तर n ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीमध्ये $t_{10} = 25$ व $t_{18} = 41$ आहे.

आपल्याला माहीत आहे की, $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad t_{10} = a + (10-1)d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$

तसेच $t_{18} = a + (18-1)d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$

$25 = a + 9d \ldots\ldots\ldots\ldots$ (I) वरून.

$a = 25 - 9d.$

ही किंमत समीकरण II मध्ये ठेवू.

समीकरण (II) $\quad a + 17d = 41$ आहे.

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore \quad 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

$d = 2$ ही किंमत समीकरण I मध्ये ठेवून.

$a + 9d = 25$

$\therefore a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore a + 18 = 25$

$\therefore a = 7$

आता, $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad t_{38} = 7 + (38-1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

n वे पद 99 असेल तर n ची किंमत काढायची आहे.

$t_n = a + (n-1)d$

$99 = 7 + (n-1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \quad 2n = 94$

$\therefore \quad n = 47$

$\therefore$ दिलेल्या श्रेढीचे 38 वे पद 81 आहे आणि 99 हे 47 वे पद आहे.

सरावसंच 3.2

1. खाली दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीवरून चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

येथे $a = \square$, $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square \quad \therefore d = \square$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

येथे $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square \quad \therefore d = \square$

(3) −3, −8, −13, −18, . . .

येथे $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square \quad \therefore a = \square, d = \square$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

येथे $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$\therefore a = \square, d = \square$

2. खालील क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे का ते ठरवा; असेल तर त्या श्रेढीचे विसावे पद काढा.

−12, −5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. दिलेली अंकगणिती श्रेढी 12, 16, 20, 24, . . . आहे. या श्रेढीचे 24 वे पद काढा.

4. खालील अंकगणिती श्रेढीचे 19 वे पद काढा.

7, 13, 19, 25, . . .

5. खालील अंकगणिती श्रेढीचे 27 वे पद काढा.

9, 4, −1, −6, −11, . . .

6. तीन अंकी नैसर्गिक संख्यासमूहात 5 ने भाग जाणाऱ्या संख्या किती आहेत ते शोधा.

7. एका अंकगणिती श्रेढीचे 11 वे पद 16 आणि 21 वे पद 29 आहे, तर त्या श्रेढीचे 41 वे पद काढा.

8. 11, 8, 5, 2, . . . या अंकगणिती श्रेढीत −151 ही संख्या कितवे पद असेल?

9. 10 पासून 250 पर्यंतच्या नैसर्गिक संख्यांपैकी किती संख्या 4 ने विभाज्य आहेत?

10. एका अंकगणिती श्रेढीचे 17 वे पद 10 व्या पदापेक्षा 7 ने जास्त आहे तर, सामान्य फरक काढा.

चतुर शिक्षिका

एक होता राजा. त्याने यशवंतराजे व गीतादेवी या आपल्या मुलांना घोडेस्वारी शिकवण्यासाठी अनुक्रमे तारा व मीरा या शिक्षिकांची नेमणूक केली. त्या दोघींना वर्षभरासाठी किती पगार द्यावा याबद्दल विचारले.

तारा म्हणाली, ''मला पहिल्या महिन्याचा पगार 100 मोहरा द्यावा व नंतर पुढील प्रत्येक महिन्यात 100 मोहरांची वाढ द्यावी. मीरा म्हणाली, ''मला पहिल्या महिन्यात 10 मोहरा पगार द्यावा आणि नंतर पुढील प्रत्येक महिन्याला आधीच्या महिन्याच्या पगाराच्या दुप्पट पगार मिळावा.''

महाराजांनी ते मान्य केले. तीन महिन्यांनंतर यशवंतराजे आपल्या बहिणीला म्हणाले, ''माझी शिक्षिका तुझ्या शिक्षिकेपेक्षा जास्त हुशार वाटते, तिने जास्त पगार मागितला आहे.'' गीतादेवी म्हणाली, ''मला प्रथम तसेच वाटले. म्हणून मी मीराताईंना विचारलेसुद्धा, 'तुम्ही कमी पगार का मागितला?', तर हसून त्यांनी सांगितले की 'आठ महिन्यांनंतर गंमत दिसेल, तू पाहा.' मी आठव्या महिन्याचा पगार काढून पाहिला. तू सुद्धा काढून पाहा.''

महिने	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ताराचा पगार	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
मीराचा पगार	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

तुम्ही ही सारणी पूर्ण करा.

ताराचा पगार 100, 200, 300, 400, . . . ही अंकगणिती श्रेढी आहे. आले का लक्षात?

$t_1 = 100, \quad t_2 = 200, t_3 = 300, . . . \qquad t_2 - t_1 = 100 = d$

हा सामान्य फरक 100 आहे.

मीराचा पगार 10, 20, 40, 80, . . . ही अंकगणिती श्रेढी नाही. कारण 20 − 10 = 10, 40 − 20 = 20, 80 − 40 = 40 म्हणजे क्रमवार संख्यांतील फरक स्थिर नाही.

मात्र या श्रेढीत प्रत्येक पद आधीच्या पदाच्या दुप्पट होत जाते.

येथे $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

$\therefore \; \frac{t_{n+1}}{t_n}$, म्हणजेच पुढचे पद व आधीचे पद यांचे गुणोत्तर, समान आहे. या प्रकारच्या श्रेढीला भूमितीय श्रेढी म्हणतात. $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ गुणोत्तर 1 पेक्षा जास्त असेल, तर भूमितीय श्रेढी ही अंकगणिती श्रेढीपेक्षा वेगाने वाढत जाते हे अनुभवा.

जर हे गुणोत्तर 1 पेक्षा कमी असेल तर ती श्रेढी कशी बदलत जाते हे अनुभवा.

आपण यांपैकी फक्त अंकगणिती श्रेढीचा अभ्यास करणार आहोत. अंकगणिती श्रेढीतील n वे पद कसे काढायचे हे आपण पाहिले आहे. आता पहिल्या n पदांची बेरीज कशी काढायची हे आपण पाहणार आहोत.

झटकन बेरीज

तीनशे वर्षांपूर्वीची गोष्ट आहे. जर्मनीमध्ये ब्यूटनेर (Buttner) नावाच्या गुरुजींची एकशिक्षकी शाळा होती. त्या गुरुजींना जोहान मार्टिन बार्टेलस हा एकमात्र मदतनीस होता. त्याचे काम म्हणजे मुलांना मुळाक्षरे शिकवणे व त्यांना लेखण्या करून देणे. ब्यूटनेर मात्र अत्यंत कडक शिस्तीचे होते. ब्यूटनेर गुरुजींना एक काम पूर्ण करायचे होते. वर्गातील मुले दंगा करू नये म्हणून त्यांना कामात गुंतवायला हवे, यासाठी त्यांनी मुलांना आकडेमोड करायला सांगायचे असे ठरवले. त्यांनी मुलांना सांगितले, 1 ते 100 संख्या पाटीवर लिहा व त्यांची बेरीज करा. गुरुजींनी त्यांचे काम सुरू केले. मुलांनी संख्या लिहायला सुरुवात केली. पाचच मिनिटांत एक पाटी पालथी पडल्याचा आवाज आला. त्यांनी कार्ल गाऊसकडे पाहिले आणि विचारले, ''हे काय? मी तुला 1 ते 100 संख्या लिहायला सांगून त्यांची बेरीजही करायला सांगितली आहे, पाटी पालथी का टाकलीस? तुला काहीच करायचे नाही का?''

कार्ल गाऊस म्हणाला, ''मी बेरीज केली आहे.''

गुरुजी म्हणाले, ''काय? इतक्या झटकन बेरीज झालीच कशी? संख्याही लिहिल्या नसतील. उत्तर किती आले?

कार्ल गाऊस म्हणाला, ''पाच हजार पन्नास.''

गुरुजी आश्चर्यचकित झाले व म्हणाले, ''कसं काढलं उत्तर?''

कार्ल गाऊसची झटकन बेरीज करण्याची पद्धती:

सलग क्रमाने संख्या	1	2	3	4	. . . .	100
	+	+	+	+		+
उलट क्रमाने संख्या	100	99	98	97	. . . .	1
बेरीज	101	101	101	101		101

प्रत्येक जोडीतील संख्यांची बेरीज 101 येते. ही बेरीज 100 वेळा आली म्हणून 100×101 हा गुणाकार केला. तो 10100 आला. येथे 1 ते 100 संख्या दोनदा विचारात घेतल्या. म्हणून 10100 च्या निम्मे केले. ते 5050 आले. म्हणून 1, 2, 3, . . . , 100 या संख्यांची बेरीज 5050 आहे. गुरुजींनी त्याला शाबासकी दिली.

आता गाऊस यांची बेरीज करण्याची क्लृप्ती वापरून अंकगणिती श्रेढीच्या n पदांची बेरीज काढण्याचे सूत्र मिळवू.

जोहान फ्रेडरिच कार्ल गाऊस

30 एप्रिल 1777 – 23 फेब्रुवारी 1855.

कार्ल गाऊस हे थोर जर्मन गणितज्ञ होते. त्यांचा जन्म ब्रॉडन स्वाईक येथे एका अशिक्षित कुटुंबात झाला. ब्यूटनेर यांच्या शाळेत त्याने आपल्या बुद्धीची चुणूक दाखवली. त्यानंतर ब्यूटनेर यांचा मदतनीस जोहान मार्टिन बार्टेलस यांची गाऊसशी मैत्री झाली. दोघांनी मिळून बीजगणितावर एक पुस्तक प्रसिद्ध केले. बार्टेलसने गाऊसची असामान्य बुद्धी अनेकांच्या नजरेला आणून दिली.

जाणून घेऊया.

अंकगणिती श्रेढीतील पहिल्या n पदांची बेरीज (Sum of first n terms of an A. P.)

अंकगणिती श्रेढी $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots\ a + (n - 1)d$

या श्रेढीत a हे पहिले पद आहे आणि d हा सामान्य फरक आहे. या श्रेढीतील पहिल्या n पदांची बेरीज S_n ने दाखवू.

$$S_n = [a] + [a + d] + \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

ही पदे उलट क्रमाने मांडून,

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a + d] + [a]$$

बेरीज करून,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a + d+a+(n-2)d]+ \ldots + [a+(n-2)d+ a + d]+ [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a+(n-1)d] \ldots n \text{ वेळा.}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d] \quad \text{किंवा} \quad S_n = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

उदाहरणार्थ, 14, 16, 18, . . . या अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 100 पदांची बेरीज काढू.

येथे $a = 14,\ d = 2,\ n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_{100} = \frac{100}{2}\,[2 \times 14+(100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11,300$$

$\therefore$ दिलेल्या श्रेढीच्या पहिल्या 100 पदांची बेरीज 11,300

हे लक्षात ठेवूया.

दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a आणि सामान्य फरक d असेल, तर

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d] = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या n पदांच्या बेरजेचे अजून एक सूत्र मिळवू.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots [a+(n-1)d]$ या अंकगणिती श्रेढीतील

पहिले पद = $t_1 = a$ आहे आणि n वे पद $[a+(n-1)d]$ आहे.

आता $S_n = \frac{n}{2}[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [पहिले पद + शेवटचे पद]

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) पहिल्या n नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करा.

उकल : पहिल्या n नैसर्गिक संख्या $1, 2, 3, \ldots, n$.

येथे $a = 1, \quad d = 1, \quad n$ वे पद = n

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_n = \frac{n}{2}$ [पहिले पद + शेवटचे पद]

$= \frac{n}{2}[1+n] \quad = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ पहिल्या n नैसर्गिक संख्यांची बेरीज $\frac{n(n+1)}{2}$ असते.

उदा. (2) पहिल्या n सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करा.

उकल : पहिल्या n सम नैसर्गिक संख्या $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

t_1 = पहिले पद = 2 , t_n = शेवटचे पद = $2n$

रीत I

$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2}[2 + 2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

रीत II

$S_n = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots. + n)$

$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

रीत III

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2 \times 2+(n-1)2]$

$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n) = n(n+1)$

$\therefore$ पहिल्या n सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज $n(n+1)$ असते.

उदा. (3) पहिल्या n विषम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज काढा.

उकल : पहिल्या n विषम नैसर्गिक संख्या.

$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1)$.

$a = t_1 = 1$ आणि $t_n = (2n-1)$, $d = 2$

रीत I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + (2n-1)]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

रीत II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

रीत III

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

$\therefore$ पहिल्या n विषम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज n^2 असते.

उदा. (4) 1 पासून 150 पर्यंतच्या सर्व विषम संख्यांची बेरीज करा.

उकल : 1 पासून 150 पर्यंतच्या सर्व विषम संख्या $1, 3, 5, 7, \ldots, 149$.

ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

येथे $a = 1$ आणि $d = 2$, प्रथम 1 ते 150 पर्यंत विषम संख्या किती ते काढू. म्हणजे n ची किंमत काढू.

$t_n = a + (n-1)d$

$149 = 1 + (n-1)2 \qquad \therefore 149 = 1 + 2n - 2$

$\therefore n = 75$

आता $1 + 3 + 5 + \ldots + 149$ या 75 संख्यांची बेरीज करू.

$a = 1$ आणि $d = 2$, $n = 75$

रीत I

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$S_n = \boxed{}$$
$$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$$
$$S_n = \boxed{}$$

रीत II

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$$
$$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$$
$$S_n = \boxed{}$$

सरावसंच 3.3

1. एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 6 व सामान्य फरक 3 आहे तर S_{27} काढा.

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$S_n = \frac{n}{2}[\square + (n-1)\,d]$

$S_{27} = \frac{27}{2}[12 + (27-1)\,\square]$

$= \frac{27}{2} \times \square$

$= 27 \times 45 \quad = \square$

2. पहिल्या 123 सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज काढा.

3. 1 व 350 यांमधील सर्व सम संख्यांची बेरीज काढा.

4. एका अंकगणिती श्रेढीचे 19 वे पद 52 आणि 38 वे पद 128 आहे, तर तिच्या पहिल्या 56 पदांची बेरीज काढा.

5. 1 व 140 यांच्या दरम्यान, 4 ने भाग जाणाऱ्या नैसर्गिक संख्यांची बेरीज किती आहे, हे काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

1 व 140 च्या दरम्यान असलेल्या 4 ने भाग जाणाऱ्या संख्या

↓

4, 8, ... , 136

↓

या एकूण किती संख्या? $\therefore\ n = \square$

↓

$a = \square,\ d = \square,\ t_n = \square$

↓

$t_n = a + (n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

→ $n = \square$ → $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}[\qquad\qquad] \quad = \square$

1 व 140 यांच्या दरम्यानच्या 4 ने भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज = $\square$

★ **6.** एका अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 55 पदांची बेरीज 3300 आहे, तर तिचे 28 वे पद काढा.

7.★ एका अंकगणिती श्रेढीतील तीन क्रमागत पदांची बेरीज 27 व त्यांचा गुणाकार 504 आहे, तर ती पदे शोधा.
(तीन क्रमागत पदे $a - d$, a, $a + d$ माना.)

8.★ एका अंकगणिती श्रेढीतील चार क्रमागत पदांची बेरीज 12 आहे. तसेच त्या चार क्रमागत पदांपैकी तिसऱ्या व चौथ्या पदांची बेरीज 14 आहे, तर ती चार पदे काढा.
(चार क्रमागत पदे $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$ माना.)

9.★ एका अंकगणिती श्रेढीचे नववे पद शून्य आहे, तर 29 वे पद हे 19 व्या पदाच्या दुप्पट आहे हे दाखवा.

जाणून घेऊया.

अंकगणिती श्रेढीचे उपयोजन (Applications of A. P.)

उदा. (1) मिक्सर तयार करणाऱ्या एका कंपनीने तिसऱ्या वर्षी 600 मिक्सर तयार केले आणि सातव्या वर्षी 700 मिक्सर तयार केले. दरवर्षी तयार होणाऱ्या मिक्सरच्या संख्येतील वाढ ठरावीक असेल तर पुढील संख्या काढा. (i) पहिल्या वर्षीचे उत्पादन (ii) 10 व्या वर्षीचे उत्पादन (iii) पहिल्या सात वर्षांतील एकूण उत्पादन.

उकल : कंपनी तयार करत असलेल्या मिक्सरची संख्येतील वाढ दरवर्षी ठरावीक असते.
यावरून लागोपाठच्या वर्षातील उत्पादन या संख्या अंकगणिती श्रेढीत आहेत. कंपनीने

(i) n व्या वर्षात t_n मिक्सर तयार केले आहेत असे मानू. दिलेल्या माहितीवरून,

$t_3 = 600$, $t_7 = 700$

आपल्याला माहीत आहे की $t_n = a+(n-1)d$

$t_3 = a+(3-1)d$

$= 600 = a+2d$ .... (I)

$t_7 = a+(7-1)d$

$= a+6d = 700$ .... (II)

$a+2d = 600$ $\therefore$ $a = 600 - 2d$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवून,

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100$ $\therefore$ $d = 25$

$a+2d = 600$ $\therefore$ $a + 2 \times 25 = 600$

$a + 50 = 600$ $\therefore$ $a = 550$

$\therefore$ पहिल्या वर्षातील उत्पादन 550 मिक्सर होते.

(ii) $t_n = a+(n-1)d$

$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$

$= 550 + 225 = 775$

$\therefore$ 10 व्या वर्षातील उत्पादन 775 मिक्सर होते.

(iii) पहिल्या 7 वर्षांतील उत्पादन काढण्यासाठी S_n चे सूत्र वापरू.

$$S_n = \frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d]$$

$$\therefore\ S_7 = \frac{7}{2}\ [1100 + 150] = \frac{7}{2}\ [1250] = 7 \times 625 = 4375$$

$\therefore$ पहिल्या 7 वर्षांत 4375 मिक्सरचे उत्पादन केले.

उदा. (2) उसने घेतलेल्या 3,25,000 रुपयांची फेड करण्यासाठी अजय शर्मा पहिल्या महिन्यात 30500 रुपये भरतात. त्यानंतर त्यांना दरमहा आधीच्या महिन्यात भरलेल्या रकमेपेक्षा 1500 रुपये कमी भरावे लागतात. तर उसने घेतलेल्या रकमेची फेड पूर्ण होण्यासाठी त्यांना किती महिने लागतील?

उकल : उसने पैसे पूर्ण फेडण्यासाठी n महिने लागतील असे मानू. 30,500 मधून दरमहा रु. 1500 कमी द्यायचे आहेत.

$\therefore$ 30,500; 30,500 – 1500; 30,500 – 2 × 1500, . . . ही देय रकमांची क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

पहिले पद = a = 30500, d = –1500 उसनी घेतलेली रक्कम = S_n = 3,25,000

$$S_n = \frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d]$$

$$3{,}25{,}000 = \frac{n}{2}\ [2 \times 30500+(n-1) \times(-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}\ [2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3{,}25{,}000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore\ 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$\therefore\ 3n^2 - 125n + 1300 = 0$ . . . . . (दोन्ही बाजूंना 250 ने भागू.)

$$\therefore\ 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore\ 3n(n-20) - 65\ (n-20) = 0$$

$$\therefore\ (n - 20)\ (3n - 65) = 0$$

$\therefore$ $n - 20 = 0$, किंवा $3n - 65 = 0$

$n = 20$ किंवा $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

n हा अंकगणिती श्रेढीतील पदाचा क्रमांक असल्याने n ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$$\therefore\ n \neq \frac{65}{3}\quad \therefore\ n = 20$$

(किंवा, 20 महिन्यांनंतर S_{20} = 3,25,000 म्हणून तेव्हा सर्व उसनी रक्कम फेडली जाईल. नंतरच्या काळाचा विचार करण्याची गरज नाही.)

$\therefore$ उसने घेतलेल्या रकमेची फेड पूर्ण होण्यासाठी त्यांना 20 महिने लागतील.

उदा. (3) अन्वर दर महिन्याला ठरावीक रकमेची बचत करतो. पहिल्या महिन्यात तो 200 रु. बचत करतो. दुसऱ्या महिन्यात 250 रु. बचत करतो. तिसऱ्या महिन्यात 300 रु. बचत करतो. तर 1000 रुपये बचत कितव्या महिन्यात होईल? त्या महिन्यात त्याची एकूण किती बचत झाली असेल?

उकल : पहिल्या महिन्यातील बचत 200 रु. ; दुसऱ्या महिन्यातील बचत 250 रु.; . . .

याप्रमाणे दरमहा होणारी बचत 200, 250, 300, . . . ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

येथे $a = 200$, $d = 50$, t_n चे सूत्र वापरून प्रथम n काढू व त्यावरून S_n काढू.

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 200 + (n-1)50$$
$$= 200 + 50n - 50$$
$$\therefore\ 1000 = 150 + 50n$$
$$150 + 50n = 1000$$
$$50n = 1000 - 150$$
$$50n = 850$$
$$\therefore\ n = 17$$

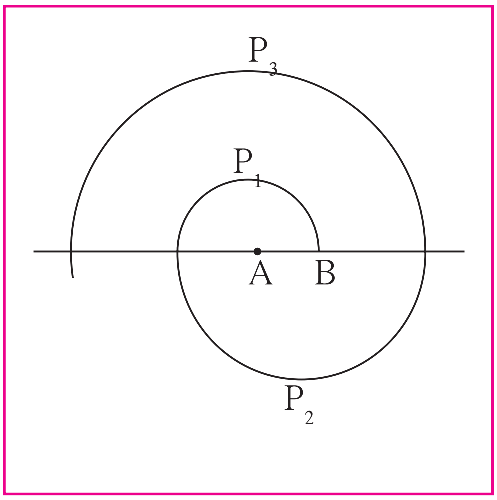
1000 रु. बचत 17 व्या महिन्यात होईल.

17 महिन्यांत एकूण बचत किती ते शोधू.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$
$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$
$$= \frac{17}{2}[1200]$$
$$= 17 \times 600$$
$$= 10200$$

17 महिन्यांत एकूण बचत 10,200 रु.

उदा. (4) आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एका रेषेवर A केंद्रबिंदू घेऊन 0.5 सेमी त्रिज्येचे P_1 हे अर्धवर्तुळ काढले. ते ह्या रेषेला B बिंदूत छेदते. आता B केंद्रबिंदू घेऊन 1 सेमी त्रिज्येचे P_2 हे अर्धवर्तुळ रेषेच्या दुसऱ्या बाजूला काढले.



आता पुन्हा A केंद्र घेऊन 1.5 सेमी त्रिज्येचे अर्धवर्तुळ P_3 काढले. अशा प्रकारे A आणि B केंद्र घेऊन अनुक्रमे 0.5 सेमी, 1 सेमी, 1.5 सेमी, 2 सेमी, अशा त्रिज्यांची अर्धवर्तुळे काढल्यामुळे एक वलयाकार आकृती तयार होते, तर अशा प्रकारे 13 अर्धवर्तुळांनी तयार झालेल्या वक्रांची एकूण लांबी किती असेल? ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

उकल : A, B, A, B, . . . या क्रमाने केंद्र घेऊन काढलेले अर्धपरिघ अनुक्रमे $P_1, P_2, P_3, \ldots$ मानू. पहिल्या अर्धवर्तुळाची त्रिज्या 0.5 सेमी आहे. दुसऱ्या अर्धवर्तुळाची त्रिज्या 1.0 सेमी आहे, . . . याप्रमाणे माहिती दिली आहे. यावरून $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{13}$ काढू.

पहिल्या अर्धपरिघाची लांबी $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ हे अर्धपरिघ, म्हणजे $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ या संख्या अंकगणिती श्रेढीत आहेत.

येथे $a = \frac{1}{2}\pi, d = \frac{1}{2}\pi$, यावरून S_{13} काढू.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

= 143 सेमी.

$\therefore$ 13 अर्धवर्तुळांनी तयार झालेल्या वक्राची एकूण लांबी 143 सेमी. असेल.

उदा. (5) एका गावात 2010 साली 4000 लोक साक्षर होते. ही संख्या दरवर्षी 400 ने वाढते. तर 2020 साली किती लोक साक्षर असतील ?

उकल :

वर्ष	2010	2011	2012	...	2020
साक्षर लोक	4000	4400	4800	...	$\boxed{}$

$a = 4000$, $d = 400$ $n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 4000 + (11-1)400$$
$$= 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

2020 साली 8000 लोक साक्षर असतील.

उदा. (6) श्रीमती शेख यांना 2015 साली वार्षिक पगार 1,80,000 रु. मिळेल अशी नोकरी मिळाली. ऑफिसने त्यांना दरवर्षी 10,000 रुपये वाढ द्यायचे कबूल केले. तर कितव्या वर्षी त्यांचा वार्षिक पगार 2,50,000 रुपये होईल ?

उकल :

वर्ष	पहिले वर्ष (2015)	दुसरे वर्ष (2016)	तिसरे वर्ष (2017)	...
पगार रुपये	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]		...

$a = 1,80,000$, $d = 10,000$ $n = ?$ $t_n = 2,50,000$ रुपये.

$t_n = a+(n-1)d$

$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10,000$

$(n-1) \times 10000 = 70,000$

$n-1 = 7$

$n = 8$

$\therefore$ 8 व्या वर्षी त्यांचा वार्षिक पगार 2,50,000 रुपये होईल.

सरावसंच 3.4

1. सानिकाने 1 जाने. 2016 ला ठरवले की त्या दिवशी ₹ 10, दुसऱ्या दिवशी ₹ 11 तिसऱ्या दिवशी ₹ 12 अशा प्रकारे बचत करत रहायचे. तर 31 डिसेंबर 2016 पर्यंत तिची एकूण बचत किती झाली?

2. एका गृहस्थाने 8000 रुपये कर्जाऊ घेतले आणि त्यावर 1360 रुपये व्याज देण्याचे कबूल केले. प्रत्येक हप्ता आधीच्या हप्त्यापेक्षा 40 रुपये कमी देऊन सर्व रक्कम 12 मासिक हप्त्यांत भरली, तर त्याने दिलेला पहिला व शेवटचा हप्ता किती होता?

3. सचिनने राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्रांमध्ये पहिल्या वर्षी 5000 रुपये , दुसऱ्या वर्षी 7000 रुपये, तिसऱ्या वर्षी 9000 रुपये याप्रमाणे रक्कम गुंतवली, तर त्याची 12 वर्षांतील एकूण गुंतवणूक किती?

4. एका नाट्यगृहात खुर्च्यांच्या एकूण 27 रांगा आहेत. पहिल्या रांगेत 20 खुर्च्या आहेत, दुसऱ्या रांगेत 22 खुर्च्या तिसऱ्या रांगेत 24 खुर्च्या याप्रमाणे सर्व खुर्च्यांची मांडणी आहे. तर 15 व्या रांगेत एकूण किती खुर्च्या असतील आणि नाट्यगृहात एकूण किती खुर्च्या असतील?

5. कारगिल येथे एका आठवड्यातील सोमवार ते शनिवार या दिवसांच्या तापमानांची नोंद केली. त्या नोंदी अंकगणिती श्रेढीत आहेत असे आढळले. सोमवार व शनिवारच्या तापमानांची बेरीज मंगळवार व शनिवारच्या तापमानांच्या बेरजेपेक्षा 5° सेल्सियसने जास्त आहे. जर बुधवारचे तापमान -30° सेल्सियस असेल तर प्रत्येक दिवसाचे तापमान काढा.

6. जागतिक पर्यावरण दिनानिमित्त त्रिकोणाकृती भूखंडावर वृक्षारोपणाचा कार्यक्रम आयोजित करण्यात आला. पहिल्या ओळीत एक झाड दुसऱ्या ओळीत दोन झाडे, तिसऱ्या ओळीत तीन याप्रमाणे 25 ओळींत झाडे लावली, तर एकूण किती झाडे लावली?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. खाली दिलेल्या उपप्रश्नांची पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ ही क्रमिका ....

(A) अंकगणिती श्रेढी आहे, कारण $d = -16$ (B) अंकगणिती श्रेढी आहे कारण $d = 4$

(C) अंकगणिती श्रेढी आहे, कारण $d = -4$ (D) अंकगणिती श्रेढी नाही.

(2) ज्याचे पहिले पद -2 आहे आणि सामान्य फरक ही -2 आहे अशा अंकगणिती श्रेढीतील पहिली चार पदे ..... आहेत.

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) पहिल्या 30 नैसर्गिक संख्यांची बेरीज खालीलपैकी कोणती?

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीचे $t_7 = 4$, $d = -4$ तर $a = ...$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) एका अंकगणिती श्रेढीसाठी $a = 3.5$, $d = 0$, तर $t_n = ...$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) एका अंकगणिती श्रेढीची पहिली दोन पदे -3, 4 आहेत. तर 21 वे पद . . . आहे.

(A) -143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) जर एका अंकगणिती श्रेढीसाठी $d = 5$ तर $t_{18} - t_{13} = ...$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 च्या पहिल्या पाच पटींची बेरीज . . . आहे.

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) 15, 10, 5, . . . या अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 10 पदांची बेरीज . . . आहे.

(A) -75 (B) -125 (C) 75 (D) 125

(10) एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 1 असून n वे पद 20 आहे. जर $S_n = 399$ आहे, तर $n = ...$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. $-11, -8, -5, ..., 49$ या अंकगणिती श्रेढीचे शेवटून चौथे पद काढा.

3. एका अंकगणिती श्रेढीचे 10 वे पद 46 आहे. 5 व्या व 7 व्या पदांची बेरीज 52 आहे. तर ती श्रेढी काढा.

4. ज्या अंकगणिती श्रेढीचे 4 थे पद -15, 9 वे पद -30 आहे, त्या श्रेढीतील पहिल्या 10 पदांची बेरीज काढा.

5. दोन अंकगणिती श्रेढी 9, 7, 5, . . . आणि 24, 21, 18, ... अशा दिल्या आहेत. जर या दोन अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद समान असेल तर n ची किंमत काढा आणि ते n वे पद काढा.

6. जर एका अंकगणिती श्रेढीच्या तिसऱ्या व आठव्या पदांची बेरीज 7 असेल आणि सातव्या व 14 व्या पदांची बेरीज -3 असेल तर 10 वे पद काढा.

7. एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद -5 आणि शेवटचे पद 45 आहे. जर त्या सर्व पदांची बेरीज 120 असेल तर ती किती पदे असतील आणि त्यांचा सामाईक फरक किती असेल ?

8. 1 ते n नैसर्गिक संख्यांची बेरीज 36 आहे. तर n ची किंमत काढा.

9. 207 या संख्येचे तीन भाग असे करा की त्या संख्या अंकगणिती श्रेढीत असतील व लहान दोन भागांचा गुणाकार 4623 असेल.

10. एका अंकगणिती श्रेढीत 37 पदे आहेत. सर्वांत मध्यावर असलेल्या तीन पदांची बेरीज 225 आहे आणि शेवटच्या तीन पदांची बेरीज 429 आहे तर अंकगणिती श्रेढी लिहा.

11.★ ज्या अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a आहे. दुसरे पद b आहे आणि शेवटचे पद c आहे. तर त्या श्रेढीतील सर्व पदांची बेरीज $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ एवढी आहे हे दाखवा.

12.★ जर अंकगणिती श्रेढीतील पहिल्या p पदांची बेरीज ही पहिल्या q पदांच्या बेरजेबरोबर असेल तर त्यांच्या पहिल्या (p + q) पदांची बेरीज शून्य असते हे दाखवा. $(p \neq q)$

13.★ अंकगणिती श्रेढीच्या m व्या पदाची m पट ही n व्या पदाच्या n पटीबरोबर असेल तर त्याचे $(m + n)$ वे पद शून्य असते हे दाखवा. $(m \neq n)$

14. 1000 रुपयांची रक्कम 10% सरळव्याज दराने गुंतवली, तर प्रत्येक वर्षाच्या शेवटी मिळणाऱ्या व्याजाची रक्कम अंकगणितीय श्रेढी होईल का हे तपासा. ती अंकगणितीय श्रेढी होत असेल तर 20 वर्षांनंतर मिळणाऱ्या व्याजाची रक्कम काढा. त्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$$\text{सरळव्याज} = \frac{P\times R\times N}{100}$$

$$1 \text{ वर्षानंतर मिळणारे सरळव्याज} = \frac{1000\times10\times1}{100} = \square$$

$$2 \text{ वर्षांनंतर मिळणारे सरळव्याज} = \frac{1000\times10\times2}{100} = \square$$

$$3 \text{ वर्षांनंतर मिळणारे सरळव्याज} = \frac{\square\times\square\times\square}{100} = 300$$

अशा प्रकारे 4, 5, 6 वर्षांनंतर मिळणारे व्याज अनुक्रमे 400, $\square$, $\square$ असेल.

या संख्येवरून $d = \square$, आणि $a = \square$

20 वर्षांनंतर मिळणारे सरळव्याज,

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$t_{20} = \square + (20-1)\,\square$$

$$t_{20} = \square$$

20 वर्षांनतर मिळणारे एकूण व्याज = $\square$